Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 22-9-2004 – soluzioni

1. (a) $P \in \pi$, come si vede sostituendo le sue coordinate nell'equazione di π. Il vettore $w = (2, 1, -2)$ è normale a π e $\langle v, w\rangle = 0$, quindi v appartiene alla giacitura di π. La retta r ha equazione parametrica $(2, -2, 2) + t(-1, 4, 1)$, da cui, eliminando t, si ottiene

$$\begin{cases} x + z = 4 \\ 4x + y = 6 \end{cases} .$$

(b) la retta s ha equazione parametrica $(2, -2, 2) + t(2, 1, -2)$ (abbiamo già detto come w sia infatti normale a π); il piano π' deve contenere il punto P e il suo vettore normale n deve essere perpendicolare a v e a w, da cui ad esempio $n = (1, 0, 1)$ e l'equazione $x + z - 4 = 0$ (equivalentemente, la giacitura di π' deve contenere v e w, quindi π' ha equazione parametrica $(2, -2, 2) + t(-1, 4, 1) + s(2, 1, -2)$; eliminando t ed s si ottiene l'equazione cercata).

(c) si ha $d(Q_t, \pi) = \dfrac{|4 + t|}{3}$, $d(Q_t, \pi') = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Perché esista una sfera centrata in Q_t tangente a π e π' è sufficiente che queste distanze siano uguali, quindi abbiamo evidentemente due valori di t (e quindi due sfere) che soddisfano la condizione (precisamente $t = -4 \pm \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$).

2. (a) La matrice dell'applicazione f_k nella base canonica è

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 4 & 2 & k+2 \end{pmatrix} .$$

Il determinante della matrice A_k è $4(k - 1)(2 - k)$. Quindi per $k \neq 1, 2$ il rango della matrice A_k è 3. Dal teorema delle dimensioni sappiamo che $\dim(\ker(f_k)) + \dim(\mathrm{Im}(f_k)) = 3$. Quindi, se $k \neq 1, 2$, si ha $\dim(\mathrm{Im}(f_k)) = 3$ e $\dim(\ker(f_k)) = 0$. Un base per lo spazio $\mathrm{Im}(f_k)$ è data dei vettori $(2, 0, 4), (1, 2k-2, 2), (k, 0, k+2)$. Nel caso in cui $k = 1$ si trova che $\mathrm{rango}(A_1) = 2$, da cui $\dim(\mathrm{Im}(f_1)) = 2$ e $\dim(\ker(f_1)) = 1$. Lo spazio $\mathrm{Im}(f_1)$ è generato da $(1, 0, 2)$ e $(1, 0, 3)$, mentre il nucleo è generato ad esempio dal vettore $(1, -2, 0)$. Infine, se $k = 2$, il rango della matrice A_2 è 2, quindi $\dim(\mathrm{Im}(f_2)) = 2$ e $\dim(\ker(f_2)) = 1$. Una base per $\mathrm{Im}(f_2)$ è data dai vettori $(2, 0, 4)$ e $(1, 2, 2)$, mentre il nucleo di f_2 è generato da $(1, 0, -1)$.

(b) Affinché il sistema $A_k \cdot X = B_k$ sia risolubile, il rango della matrice ottenuta orlando A_k con la colonna $B_k = {}^t(2k + 1, k - 1, 2k + 6)$ deve essere uguale al rango di A_k. Per $k \neq 1, 2$ il rango di A_k è 3, dunque questo si verifica sempre. Se $k = 1, 2$, il rango della matrice orlata è 2, quindi il sistema è risolubile.

(c) La matrice A_0 è

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} .$$

Dalla terza colonna ricaviamo un autovalore $\lambda_1 = 2$. Inoltre $\det(A_0) = -8$ e $\mathrm{Tr}(A_0) = 2$. Quindi $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ e $\lambda_2\lambda_3 = -4$, da cui $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = -2$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ è dato dal nucleo di $2I - A_0$ e consiste dei vettori (x, y, z) tali che $x = y = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = -2$ è il nucleo di $I - A_0$ ed è generato dal vettore $(-1, 4, -1)$. L'applicazione f_0 non è quindi diagonalizzabile, poiché la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda_1 = 2$ è diversa da quella geometrica.

3. (a) Se λ è un autovalore di A, allora $\lambda^3 = \lambda^2$, quindi $\lambda = 0$ oppure $\lambda = 1$.

(b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non è diagonalizzabile, perchè il suo solo autovalore è 0 ma il corrispondente autospazio è generato dal vettore ${}^t(1, 0)$, e ha quindi dimensione 1. D'altra parte $A^2 = 0 = A^3$.

(c) Moltiplicando la relazione $A^3 = A^2$ per A si ottiene che $A^4 = A^3$, e combinando le due relazioni che $A^4 = A^2$. Dunque il polinomio minimo di A^2 divide $X^2 - X$. Poiché quest'ultimo polinomio non ha radici multiple, lo stesso vale per il polinomio minimo di A^2. Ne segue che A^2 è diagonalizzabile.

(d) Se A è invertibile si possono moltiplicare i due lati della relazione $A^3 = A^2$ per il quadrato dell'inversa di A. Il risultato è che $A = I$.

Indichiamo con f l'endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ dato da $f(X) = AX$. Dire che il rango di A^2 è $n-1$ equivale a dire che il nucleo di f^2 ha dimensione 1. Poiché $\ker(f) \subset \ker(f^2)$, il nucleo di f può avere dimensione 0 o 1; però la prima alternativa va esclusa perchè direbbe che f è invertibile, e quindi f^2 è invertibile, cioè di rango n. In conclusione f ha rango $n-1$ e $\ker(f) = \ker(f^2)$. Indichiamo il nucleo di f con V_0, e con V_1 l'immagine di f, che ha dimensione $n-1$. Notiamo che $f(V_0) \subset V_0$ e $f(V_1) \subset V_1$. Inoltre $V_0 \cap V_1 = \{0\}$; infatti, se $v \in V_0 \cap V_1$, allora $v = f(w)$ per qualche w, mentre $f(v) = 0$, e quindi $f^2(w) = 0$. Poiché $\ker(f) = \ker(f^2)$ se ne deduce che $v = f(w) = 0$. Ora la restrizione di f a V_1 è invertibile, quindi. per quanto si è mostrato sopra, è l'identità. A questo punto si sa che V_0 è l'autospazio dell'autovalore 0, V_1 quello dell'autovalore 1, e che $\mathbb{C}^n$ è loro somma diretta; ciò equivale a dire che A è diagonalizzabile.