Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 18.2.2004 – soluzioni

Compito **A**

1. (a) P_2 risulta avere coordinate $(6, 12, 3)$. La distanza cercata è perciò

$$\sqrt{(6-2)^2 + (12-10)^2 + (3-(-1))^2} = 6.$$

(b) $P_2 - P_1 = (4, 2, 4)$; d'altra parte il vettore direttore della retta s risulta $(0, 1, 1)$. Di conseguenza il piano appartiene al fascio

$$(2-4)x - 4y + 4z + k = 0.$$

Imponendo l'appartenenza del punto P_1, l'equazione diventa $x + 2y - 2z = 24$.

(c) Tra i piani ortogonali alla retta s, cioè il fascio $y + z + k = 0$, quello che contiene P_1 ha $k = -9$. il punto si minima distanza da P_1 è quindi $(3, 8, 1)$ e la distanza vale 3. L'equazione è quindi

$$(x-2)^2 + (y-10)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

2. (a) La matrice dell'applicazione f nella base $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, -1, 0)$ e $v_4 = (0, 1, 0, -1)$ è

$$A(b) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b \\ b & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Si determina il rango della matrice $A(b)$ usando il teorema delle dimensioni secondo cui $\dim\ker(f) + \dim\operatorname{Im}(f) = 4$. Il determinante di $A(b)$ è uguale a $(b+2)(1-2b)$, per cui, se $b \neq -2, \frac{1}{2}$, il rango è massimo, ovvero $\dim\operatorname{Im}(f) = 4$ e $\dim\ker(f) = 0$. Nel caso in cui $b = -2$ e $b = \frac{1}{2}$, si trova che $\text{rango}(A(-2)) = \text{rango}(A(\frac{1}{2})) = 3$, da cui $\dim\operatorname{Im}(f) = 3$ e $\dim\ker(f) = 1$.

(c) Il vettore $u = v_1 + 3v_2 - v_3 + 3v_4$ appartiene all'immagine di f se e solo se può essere scritto come combinazione lineare dei vettori che generano l'immagine. In altre parole, il rango della matrice ottenuta orlando $A(b)$ con la colonna ${}^t(1, 3, -1, 3)$ deve essere pari al rango della matrice $A(b)$. Per $b \neq -2, \frac{1}{2}$, $\text{rango}(A(b)) = 4$, quindi questo si verifica sempre. Ci rimangono i casi $b = -2$ e $b = \frac{1}{2}$. Se $b = \frac{1}{2}$, si verifica che il rango della matrice orlata è 4, e quindi il vettore u non appartiene all'immagine di f. Invece, se $b = -2$, il rango della matrice orlata vale 3. Poiché anche il rango di $A(-2)$ è 3, in questo caso u appartiene all'immagine di f.

(d) La matrice $A(0)$ è

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dall'esame della prima e dalla quarta colonna ricaviamo che $\lambda_1 = -1$ e $\lambda = -2$ sono autovalori. Inoltre $\det(A(0)) = 2$ e $\operatorname{Tr}(A(0)) = -5$. Quindi $\lambda_3 + \lambda_4 = -2$ e $\lambda_3\lambda_4 = 1$, da cui $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Calcoliamo gli autospazi. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -2$ corrisponde al nucleo di $-2I - A(0)$ e consiste dei vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4$ tali che $x = y = z = 0$, e dunque è generato da v_4. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = -1$ corrisponde al nucleo di $-I - A(0)$ ed è costituito dai vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4$ tali che $z = 0$ e $y + t = 0$.

(e) $\lambda = -1$ è un autovalore triplo. La dimensione dell'autospazio relativo è 2 (è generato ad esempio da $(0, 1, 0, -1)$ e $(1, 0, 0, 0)$). Quindi, poichè la molteplicità algebrica di λ è diversa da quella geometrica, f non è diagonalizzabile.

3. (a) Vero. Sia λ un autovalore di A, e u un suo autovettore; dunque $Au = \lambda u$. Si mostra induttivamente su h che $A^h u = \lambda^h u$. In effetti, se è noto che $A^{h-1}u = \lambda^{h-1}u$, allora $A^h u = AA^{h-1}u = A\lambda^{h-1}u = \lambda^{h-1}Au = \lambda^h u$. Se $A^n = I$, segue che $u = A^n u = \lambda^n u$, e quindi che $\lambda^n = 1$, dato che $u \neq 0$.

(b) Falso. La matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ha come solo autovalore -1, ma $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) Falso. Ad esempio, la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ non è diagonalizzabile, ma $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ lo è.

Compito **B**

1. (a) P_2 risulta avere coordinate $(5, 7, -1)$. La distanza cercata è perciò

$$\sqrt{(5-(-1))^2 + (7-5)^2 + (-1-(-10))^2} = 11.$$

(b) $P_2 - P_1 = (6, 2, 9)$; d'altra parte il vettore direttore della retta s risulta $(2, 0, 1)$. Di conseguenza il piano appartiene al fascio

$$2x + 12y - 4z + k = 0.$$

Imponendo l'appartenenza del punto P_1, l'equazione diventa $x + 6y - 2z = 49$.

(c) Tra i piani ortogonali alla retta s, cioè il fascio $2x + z + k = 0$, quello che contiene P_1 ha $k = 11$. il punto si minima distanza da P_1 è quindi $(-2, 3, -8)$ e la distanza vale 3. L'equazione è quindi

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 9.$$

2. (a) La matrice dell'applicazione f nella base $v_1 = (1, 1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1, 0)$, $v_3 = (2, 0, -1, 0)$ e $v_4 = (0, 1, 0, -1)$ è

$$A(b) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Si determina il rango della matrice $A(b)$ usando il teorema delle dimensioni secondo cui $\dim\ker(f) + \dim\operatorname{Im}(f) = 4$. Il determinante di $A(b)$ è uguale a $-2(b-1)(b-4)$, per cui, se $b \neq 1, 4$, il rango è massimo, ovvero $\dim\operatorname{Im}(f) = 4$ e $\dim\ker(f) = 0$. Nel caso in cui $b = 1$ e $b = 4$, si trova che $\text{rango}(A(1)) = \text{rango}(A(4)) = 3$, da cui $\dim\operatorname{Im}(f) = 3$ e $\dim\ker(f) = 1$.

(c) Il vettore $u = 5v_1 + 2v_2 + v_3 - 4v_4$ appartiene all'immagine di f se e solo se può essere scritto come combinazione lineare dei vettori che generano l'immagine. In altre parole, il rango della matrice ottenuta orlando $A(b)$ con la colonna ${}^t(1, 3, -1, 3)$ deve essere pari al rango della matrice $A(b)$. Per $b \neq -2, \frac{1}{2}$, $\text{rango}(A(b)) = 4$, quindi questo si verifica sempre. Ci rimangono i casi $b = 1$ e $b = 4$. Se $b = 4$, si verifica che il rango della matrice orlata è 4, e quindi il vettore u non appartiene all'immagine di f. Invece, se $b = 1$, il rango della matrice orlata vale 3. Poiché anche il rango di $A(1)$ è 3, in questo caso u appartiene all'immagine di f.

(d) La matrice $A(0)$ è

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dall'esame della seconda e dalla terza colonna ricaviamo che $\lambda_1 = -1$ e $\lambda = 2$ sono autovalori. Inoltre $\det(A(0) = -8$ e $\operatorname{Tr}(A(0)) = 5$. Quindi $\lambda_3 + \lambda_4 = 4$ e $\lambda_3\lambda_4 = 4$, da cui $\lambda_3 = \lambda_4 = 2$. Calcoliamo gli autospazi. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$ è dato dal nucleo di $I - A(0)$ e consiste dei vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4$ tali che $x = z = t = 0$. L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 2$ è il nucleo di $2I - A(0)$ ed è costituito dai vettori $xv_1 + yv_2 + zv_3 + tv_4$ tali che $x = 0$ e $3y + t = 0$.

(e) $\lambda = 2$ è un autovalore triplo. La dimensione dell'autospazio relativo è 2 (è generato ad esempio da $(0, 1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 1)$). Quindi poichè la molteplicità algebrica è diversa da quella geometrica, f non è diagonalizzabile.

3. Stessa soluzione che per l'esercizio 3 del compito **A**, sostituendo B al posto di A.