Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 16.6.2004 – soluzioni

Compito **A**

1. (a) Il vettore $(-4,3,-2)$ è ortogonale al piano Π, una cui equazione cartesiana risulta perciò $-4x+3y-2z+3=0$, che è soddisfatta dalle coordinate di Q. r ha giacitura generata da $(-4,3,-2)$ e passa per Q: otteniamo ad esempio le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x+4y=12 \\ -x+2z=12 \end{cases}.$$

(b) Sostituendo nelle equazioni cartesiane di r le equazioni parametriche per s

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=-1 \\ z=1+2t \end{cases}$$

si ottiene $x=\dfrac{16}{3}$, $z=\dfrac{14}{3}$ e $t=-\dfrac{10}{3}$, ma allora $z\neq 1+2t$.

(c) Poiché $(-1,0,2)=(1,2,1)-(2,2,-1)$, ma $(2,-1,1)\notin\Pi$, Π e s sono paralleli. Per calcolare la distanza è sufficiente calcolare la distanza di $(2,-1,1)$ da Π che vale

$$\frac{|-8-3-2+3|}{\sqrt{29}}=\frac{10}{\sqrt{29}}.$$

2. (a) La base di U è formata dai vettori $\{1+t, t+2t^2\}$ come si vede facilmente ponendo rispettivamente $a=0, b=1$ e $a=1, b=0$.

(b) Si dimostra che $U\cap W=\{0\}$. Infatti, consideriamo un polinomio $p(t)$ che appartenga all'intersezione di U e W. Allora $p(t)$ si può scrivere sia come $\alpha(t+1)+\beta(2t^2+t)$, in quanto appartenente a U, sia come $\gamma(1+t+t^2)$ in quanto elemento di W. Quindi $\alpha(t+1)+\beta(2t^2+t)=\gamma(1+t+t^2)$. Uguagliando i coefficienti rispettivamente del termine noto, di t e di t^2, si ottiene

$$\begin{cases} \alpha=\gamma \\ \alpha+\beta=\gamma \\ 2\beta=\gamma \end{cases} \Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=0.$$

Ora osservando che $\dim(U)=2$ e $\dim(W)=1$, si conclude che $W\oplus U=V$.
Alternativamente, si può notare che $\{1+t, t+2t^2, 1+t+t^2\}$ costituiscono una base di V.

(c) La matrice dell'applicazione F nella base $1,t,t^2$ è

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(d) F è sia iniettiva che suriettiva. Infatti $\ker(F)$ è l'insieme dei polinomi $p(t)$ tali che $F(p(t))=0$, ovvero tali che $a_0+(a_2-a_1)t+(a_0+2a_2)t^2$ sia uguale a zero. Questo implica $a_0=a_1=a_2=0$, da cui $\ker(F)=\{0\}$. Inoltre il rango della matrice A è massimo, quindi $\dim(Im(F))=3$, ovvero F è suriettiva.

(e) Dal punto (d) si ha che F è un isomorfismo. Quindi F manda U e W rispettivamente in due spazi $F(U)$ e $F(W)$ della stessa dimensione. Inoltre ovviamente si ha $F(U)\cap F(W)=\{0\}$.

(f) Il determinante della matrice A è uguale a -2, mentre la traccia è 2. Dalla seconda colonna, ricaviamo l'autovalore $\lambda_1=-1$. Quindi $\lambda_2+\lambda_3=3$ e $\lambda_2\lambda_3=2$, da cui $\lambda_2=2$ e $\lambda_3=1$. Poiché gli autovalori sono distinti, l'applicazione F è diagonalizzabile.

3. Gli endomorfismi f e g sono diagonalizzabili, perchè hanno ordine finito. Per ogni scalare λ indichiamo con V_λ l'autospazio di f corrispondente a λ, e con W_λ l'autospazio, sempre relativo a λ, della restrizione di f a W, vista come endomorfismo di W; è chiaro che $W_\lambda=W\cap V_\lambda$. Indichiamo con $\lambda_1,\dots,\lambda_h$ gli autovalori (distinti) di f.

(a) La restrizione di f a V_λ è la moltiplicazione per λ. Quindi, se U_λ indica un qualsiasi sottospazio di V_λ tale che $V_\lambda = W_\lambda \oplus U_\lambda$ (ne esistono sempre), si ha che $f(U_\lambda) \subset U_\lambda$. Poniamo $U = U_{\lambda_1} + \cdots + U_{\lambda_h}$; questa somma è diretta, e ovviamente $f(U) \subset U$. Inoltre

$$V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_h} = (W_{\lambda_1} \oplus U_{\lambda_1}) \oplus \cdots \oplus (W_{\lambda_h} \oplus U_{\lambda_h}) = (W_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_h}) \oplus (U_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus U_{\lambda_h}) = W \oplus U$$

(b) Se $v \in V_\lambda$, $f(v) = \lambda v$, e quindi $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Ciò mostra che $g(V_\lambda) \subset V_\lambda$. Inoltre $g(W_\lambda) = g(W \cap V_\lambda)) \subset g(W) \cap g(V_\lambda) \subset W \cap V_\lambda = W_\lambda$. Il punto (a), applicato alla restrizione di g a V_λ e al sottospazio W_λ, mostra che esiste un sottospazio U_λ di V_λ tale che $V_\lambda = W_\lambda \oplus U_\lambda$ e che $g(U_\lambda) \subset U_\lambda$. A questo punto si può ragionare esattamente come in (a); basta osservare che

$$g(U) = g(U_{\lambda_1} + \cdots + U_{\lambda_h}) \subset g(U_{\lambda_1}) + \cdots + g(U_{\lambda_h}) \subset U_{\lambda_1} + \cdots + U_{\lambda_h} = U$$

(c) Poniamo $V = \mathbb{C}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$, $g(x, y) = (x - 2y, -y)$. Si verifica subito che $f^2 = g^2 = I$. Sia $W = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$; è chiaro che $f(W) \subset W \supset g(W)$. Se U è un sottospazio di V tale che $V = W \oplus U$, U ha dimensione 1; quindi, se $f(U) \subset U$, U è contenuto in un autospazio di f. D'altra parte gli autospazi di f sono W e $\{(0, y) : y \in \mathbb{C}\}$; dunque U coincide con quest'ultimo. Ora, $(0, 1) \in U$, ma $g(0, 1) = (-2, -1) \notin U$, e quindi $g(U) \not\subset U$.

Compito **B**

1. (a) Il vettore $(4, 3, 1)$ è ortogonale al piano Π, una cui equazione cartesiana risulta perciò $4x + 3y + z - 6 = 0$, che è soddisfatta dalle coordinate di Q. r ha giacitura generata da $(4, 3, 1)$ e passa per Q: otteniamo ad esempio le equazioni cartesiane

$$\begin{cases} -3x + 4y = 33 \\ -x + 4z = 3 \end{cases}.$$

(b) Sostituendo nelle equazioni cartesiane di r le equazioni parametriche per s

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

si ottiene $y = \dfrac{21}{2}$, $z = \dfrac{3}{2}$ e $t = -\dfrac{19}{2}$, ma allora $z \neq 2 + 3t$.

(c) Poiché $(0, -1, 3) = (1, -2, 2) + (-1, 1, 1)$, ma $(3, 1, 2) \notin \Pi$, Π e s sono paralleli. Per calcolare la distanza è sufficiente calcolare la distanza di $(3, 1, 2)$ da Π che vale

$$\frac{|12 + 3 + 2 - 3|}{\sqrt{26}} = \frac{14}{\sqrt{26}}.$$

2. (a) La base di U è formata dai vettori $\{1 + 2t, -t + t^2\}$ come si vede facilmente ponendo rispettivamente $a = 0, b = 1$ e $a = 1, b = 0$.

(b) Si dimostra che $U \cap W = \{0\}$. Infatti, consideriamo un polinomio $p(t)$ che appartenga all'intersezione di U e W. Allora $p(t)$ si può scrivere sia come $\alpha(2t + 1) + \beta(t^2 - t)$, in quanto appartenente a U, sia come $\gamma(2 + t - t^2)$ in quanto elemento di W. Quindi $\alpha(2t + 1) + \beta(t^2 - t) = \gamma(2 + t - t^2)$. Uguagliando i coefficienti rispettivamente del termine noto, di t e di t^2, si ottiene

$$\begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ 2\alpha - \beta = \gamma \\ \beta = -\gamma \end{cases} \implies \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Ora osservando che $\dim(U) = 2$ e $\dim(W) = 1$, si conclude che $W \oplus U = V$.
Alternativamente, si può notare che $\{1 + 2t, -t + t^2, 2 + t - t^2\}$ costituiscono una base di V.

(c) La matrice dell'applicazione F nella base $1, t, t^2$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

(d) F è sia iniettiva che suriettiva. Infatti $\ker(F)$ è l'insieme dei polinomi $p(t)$ tali che $F(p(t)) = 0$, ovvero tali che $-a_1 + (2a_0 + 3a_1)t + (a_0 - 3a_2)t^2$ sia uguale a zero. Questo implica $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, da cui $\ker(F) = \{0\}$. Inoltre il rango della matrice A è massimo, quindi $\dim(Im(F)) = 3$, ovvero F è suriettiva.

(e) Dal punto d), si ha che F è un isomorfismo. Quindi F manda U e W rispettivamente in due spazi $F(U)$ e $F(W)$ della stessa dimensione. Inoltre ovviamente si ha $F(U) \cap F(W) = \{0\}$.

(f) Il determinante della matrice A è uguale a -6, mentre la traccia è 0. Dalla terza colonna, ricaviamo l'autovalore $\lambda_1 = -3$. Quindi $\lambda_2 + \lambda_3 = 3$ e $\lambda_2\lambda_3 = 2$, da cui $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$. Poiché gli autovalori sono distinti, l'applicazione F è diagonalizzabile.

3. Vedi esercizio 3 del compito **A**.