Corso di Algebra lineare - a.a. 2003-2004

Prova scritta del 3.2.2004 – soluzioni

1. (a) Calcoliamo due vettori della giacitura del piano π, ad esempio

$$P_2 - P_1 = \left(1, 3, \frac{3}{2}\right) \text{ e } P_3 - P_1 = \left(1, 5, \frac{5}{2}\right).$$

Il loro prodotto vettore

$$\left(3 \cdot \frac{5}{2} - 5 \cdot \frac{3}{2}, -\left(1 \cdot \frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{3}{2}\right), 1 \cdot 5 - 1 \cdot 3\right) = (0, -1, 2)$$

è quindi ortogonale al piano; poiché la sua norma è $\sqrt{5}$ il vettore richiesto è

$$\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

o il suo opposto.

(b) Troviamo i centri delle due sfere spostandoci di una distanza $\frac{3}{2}$ dal punto P_1 in direzione ortogonale:

$$P_1 \pm \frac{3}{2}\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

da cui le equazioni:

$$(X-1)^2 + \left(Y - 2 + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(Z - \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$(X-1)^2 + \left(Y - 2 - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2 + \left(Z - \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

(c) Calcoliamo la distanza tra il centro di S e i centri delle due sfere:

$$\left|\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(P_1 \pm \left(0, -\frac{3\sqrt{5}}{10}, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)\right)\right| = \sqrt{11 \pm \frac{3}{10}\sqrt{5}}.$$

Poiché anche la minore delle due è più grande della somma dei raggi delle due sfere (infatti $\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$, mentre $\sqrt{11 - \frac{3}{10}\sqrt{5}} > \sqrt{10} > 3$), la distanza cercata vale

$$\sqrt{11 - \frac{3}{10}\sqrt{5}} - 2$$

2. (a) La matrice di f rispetto alla base $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$, $v_3 = (2, 1, 2)$ è

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $(X-1)^3$. Quindi l'unico autovalore di f è 1, con molteplicità 3. L'autospazio relativo a 1 corrisponde al nucleo di $I - A$, e consiste di tutti i vettori della forma $xv_1 + yv_2 + zv_3$ tali che $x + y + z = 0$; ha quindi dimensione 2.

(b) f non è diagonalizzabile perchè l'autovalore 1 ha molteplicità 3 ma il corrispondente autospazio ha dimensione 2.

(c) Gli elementi di U che appartengono anche a W sono quei vettori $a(1,1,1)+b(2,0,1) = (a+2b, a, a+b)$ tali che $0 = (a+2b)+a+2(a+b) = 4a+4b$, cioè tali che $a+b=0$. Lo spazio Z ha quindi dimensione 1 e una sua base è data ad esempio dal vettore $(1,-1,0)$.

(d) I vettori $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,0,1)$ e $v_3 = (1,-1,0)$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Un'applicazione lineare con le caratteristiche richieste è l'applicazione g definita da $g(v_1) = v_1$, $g(v_2) = v_2$ e $g(v_3) = (0,0,0)$.

3. (a) Falso. La matrice nulla ha la proprietà richiesta, ma il suo polinomio caratteristico è X^3.

(b) Vero. In effetti, se M ha tre autovalori distinti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, il suo polinomio minimo è $(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)(X-\lambda_3)$, e quindi ha grado 3; poiché divide X^3+X, coincide con esso.

(c) Vero. Il polinomio minimo di M divide $X^3+X = X(X-i)(X+i)$, che non ha radici multiple. Quindi anche il polinomio minimo di M non ha radici multiple, e dunque M è diagonalizzabile.