Corso di Algebra - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 23.2.2006

1. Sia G un gruppo e H un suo sottogruppo. Dimostrare che
$$K = \{a \in G : gag^{-1} \in H \text{ per ogni } g \in G\}$$
è un sottogruppo normale di G.

2. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che in S_n esiste un elemento di ordine 12.

3. Determinare gli $n \in \mathbb{N}$ che verificano $2^n \equiv 8 \mod 35$.

4. Sia A un anello commutativo, a un elemento di A e
$$\mathrm{Ann}(a) = \{b \in A : ab = 0\}.$$
   (a) Verificare che $\mathrm{Ann}(a)$ è un ideale di A.
   (b) Assumendo che $\mathrm{Ann}(a)$ sia un ideale primo e che $a^2 \neq 0$, dimostrare che $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(a^n)$ per ogni intero positivo n.

5. Determinare il grado del campo di spezzamento del polinomio $P(X) = X^4 - 25$ sul campo K in ciascuno dei seguenti casi:
   (a) $K = \mathbb{Q}$;
   (b) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
   (c) $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
   (d) $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente.