Corso di Algebra - a.a. 2005-2006

Prova scritta del 19.6.2006

1. Dare un esempio di gruppo finito G generato da due elementi di ordine 2, ma il cui ordine non sia una potenza di 2.

2. Sia G un gruppo, e siano H e K suoi sottogruppi. Supponiamo che:

   - K sia normale;
   - la composizione dell'inclusione $H \to G$ e dell'applicazione quoziente $G \to G/K$ sia suriettiva.

   Mostrare che:

   (a) $G = HK = KH$;

   (b) se H è abeliano e K è contenuto nel centro di G, allora G è abeliano.

3. Sia $f : A \to B$ un omomorfismo di anelli commutativi, e per ogni ideale I di A denotiamo con I^e l'ideale di B generato da $f(I)$. Dimostrare che, se I e J sono due ideali di A, allora:

   (a) $(I + J)^e = I^e + J^e$;

   (b) $(IJ)^e = I^e J^e$.

4. Dire se l'anello $K[X]/(X^4 + 7)$ è un dominio d'integrità in ciascuno dei seguenti casi:

   (a) $K = \mathbb{Q}$;

   (b) $K = \mathbb{R}$;

   (c) $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

5. Sia $F = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, e sia $p(X) \in F[X]$ il polinomio $X^6 - 1$. Sia L il campo di spezzamento di $p(X)$ su F. Calcolare $[L : F]$.

%%

Ogni risposta va giustificata.

Su ogni foglio dell'elaborato vanno indicati nome e cognome dello studente.