

Corso di Algebra 1 - a.a. 2025-2026

Prova scritta del 09/07/2026

1. Sia $G := \{(\sigma, \tau) \in S_3 \times S_4 : \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)\}$ (dove ε indica il segno di una permutazione).
 - (a) Dimostrare che G è un sottogruppo di $S_3 \times S_4$.
 - (b) Determinare i valori di n per cui G contiene un sottogruppo ciclico di ordine n .
 - (c) Determinare i valori di n per cui G contiene un sottogruppo normale e ciclico di ordine n .
 - (d) Dimostrare che il sottogruppo K di G generato da tutti gli elementi di ordine 6 è normale e che G/K è isomorfo a S_3 .
2. Diciamo che un ideale I di un anello A è *spezzante* se esiste un omomorfismo di anelli $\alpha: A/I \rightarrow A$ tale che $\pi \circ \alpha = \text{id}_{A/I}$, dove $\pi: A \rightarrow A/I$ indica l'omomorfismo di proiezione al quoziente.
 - (a) Nel caso $A = \mathbb{Z}$, dimostrare che I è spezzante se e solo se $I = \{0\}$.
 - (b) Dimostrare che, se A è un dominio e I è spezzante, allora I è primo.

Nel seguito sia $A = K[X]$ con K campo e $I = (f)$ con $f \in A \setminus \{0\}$.

- (c) Dimostrare che, se $\deg(f) = 1$, allora I è spezzante.
- (d) Dimostrare che, se I è spezzante, allora $\deg(f) = 1$.

Soluzioni

1. (a) $((1), (1)) \in G$ perché $\varepsilon((1)) = 1$. Dati $(\sigma, \tau), (\sigma', \tau') \in G$ (cioè $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\tau)$ e $\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\tau')$), anche $(\sigma, \tau)(\sigma', \tau') = (\sigma\sigma', \tau\tau') \in G$ perché $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\tau)\varepsilon(\tau') = \varepsilon(\tau\tau')$. Questo basta per concludere che G è un sottogruppo del gruppo finito $S_3 \times S_4$.
- (b) I valori cercati di n sono 1, 2, 3, 4 e 6. Infatti G contiene un sottogruppo ciclico di ordine n se e solo se contiene un elemento di ordine n . Per ogni $\sigma \in S_3$ e per ogni $\tau \in S_4$ si ha:
 - $\text{ord}(\sigma) = 1$ o 3 se $\varepsilon(\sigma) = 1$ (cioè se σ è (1) o un 3-ciclo) e $\text{ord}(\sigma) = 2$ se $\varepsilon(\sigma) = -1$ (cioè se σ è un 2-ciclo);
 - $\text{ord}(\tau) = 1, 2$ o 3 se $\varepsilon(\tau) = 1$ (cioè se τ è (1) , un prodotto di due 2-cicli disgiunti o un 3-ciclo) e $\text{ord}(\tau) = 2$ o 4 se $\varepsilon(\tau) = -1$ (cioè se τ è un 2-ciclo o un 4-ciclo).

Dunque l'insieme dei valori assunti da $\text{ord}((\sigma, \tau)) = \text{mcm}(\text{ord}(\sigma), \text{ord}(\tau))$ al variare di $(\sigma, \tau) \in G$ è

$$\{\text{mcm}(s, t) : s \in \{1, 3\}, t \in \{1, 2, 3\}\} \cup \{\text{mcm}(s, t) : s \in \{2\}, t \in \{2, 4\}\},$$

cioè $\{1, 2, 3, 6\} \cup \{2, 4\} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

- (c) I valori cercati di n sono 1 e 3. Infatti sono normali in G sia $\{((1), (1))\}$ di ordine 1 che $A_3 \times \{(1)\}$ di ordine 3 (quindi entrambi ciclici). Si noti che $A_3 \times \{(1)\} \triangleleft G$ perché in $A_3 \times \{(1)\} \triangleleft S_3 \times S_4$ (dato che $A_3 \triangleleft S_3$ e $\{(1)\} \triangleleft S_4$) e $A_3 \times \{(1)\} \subseteq G$. Resta da dimostrare che, se $H < G$ è ciclico di ordine $n \neq 1, 3$, allora H non è normale. Per il punto precedente deve essere $n = 2, 4$ o 6 , e in ogni caso, se $h = (\sigma, \tau)$ è un generatore di H , σ è un 2-ciclo oppure τ è un prodotto di due 2-cicli disgiunti. Ora, se $\sigma = (a, b)$ è un 2-ciclo, indicando con c l'elemento di $\{1, 2, 3\}$ diverso da a e da b , si ha $(a, b, c)\sigma(a, b, c)^{-1} = (b, c) \notin \langle \sigma \rangle$. Questo implica che $g := ((a, b, c), (1)) \in G$ e $ghg^{-1} = ((b, c), \tau) \notin H \subseteq \langle \sigma \rangle \times \langle \tau \rangle$, e pertanto H non è normale in G . Ad analoga conclusione si arriva nel caso in cui $\tau = (a, b)(c, d)$ è un prodotto di due 2-cicli disgiunti, usando il fatto che $(a, b, c)\tau(a, b, c)^{-1} = (b, c)(a, d) \notin \langle \tau \rangle$.
- (d) Per quanto visto nel secondo punto $(\sigma, \tau) \in G$ ha ordine 6 se e solo se σ è un 3-ciclo e τ è un prodotto di due 2-cicli disgiunti. Tali elementi sono contenuti in $A_3 \times V_4 \triangleleft G$ (analogamente a prima, la normalità segue da $A_3 \triangleleft S_3$, $V_4 \triangleleft S_4$ e $A_3 \times V_4 \subseteq G$). Questo implica $K \subseteq A_3 \times V_4$, e in effetti $K = A_3 \times V_4$, perché ogni

elemento di $A_3 \times V_4$ è una potenza di uno di ordine 6, come è facile verificare. Poiché $G = (A_3 \times A_4) \sqcup ((S_3 \setminus A_3) \times (S_4 \setminus A_4))$, si ha $\#G = 2(\#A_3)(\#A_4) = 72$ e $\#K = (\#A_3)(\#V_4) = 12$, e dunque per il teorema di Lagrange $\#(G/K) = (\#G)/(\#K) = 6$. Per concludere che $G/K \cong S_3$, grazie alla classificazione dei gruppi di ordine 6, basta dimostrare che G/K non è ciclico. Se per assurdo esistesse $gK \in G/K$ (con $g \in G$) di ordine 6, si avrebbe $6 \mid \text{ord}(g)$. Ma per il secondo punto questo implica $\text{ord}(g) = 6$, e dunque $g \in K$, cioè $gK = K$, il che porta alla contraddizione $\text{ord}(gK) = 1$.

2. (a) $\{0\}$ è spezzante perché $\pi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\{0\}$ è un isomorfismo, e quindi l'isomorfismo di anelli $\alpha := \pi^{-1}$ è tale che $\pi \circ \alpha = \text{id}_{\mathbb{Z}/\{0\}}$. Ogni altro ideale di $\mathbb{Z}$, essendo della forma $n\mathbb{Z}$ con $n > 0$, non è spezzante perché non esiste nessun omomorfismo di anelli $\alpha: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ (se no si avrebbe l'assurdo $\infty = \text{ord}(1) = \text{ord}(\alpha(\bar{1})) \mid \text{ord}(\bar{1}) = n$).
- (b) Per ipotesi esiste un omomorfismo di anelli $\alpha: A/I \rightarrow A$ tale che $\pi \circ \alpha = \text{id}_{A/I}$. Poiché α è iniettivo (dato che lo è $\pi \circ \alpha$), A/I è isomorfo al sottoanello $\text{im}(\alpha)$ di A . Tenendo conto che un sottoanello di un dominio è un dominio, questo dimostra che A/I è un dominio, e dunque l'ideale I è primo.
- (c) A meno di associati, si può supporre $f = X - a$ per qualche $a \in K$. L'omomorfismo di anelli (di valutazione in a) $\psi_a: K[X] \rightarrow K$, definito da $\psi_a(g) := g(a)$, è tale che $\psi_a(X - a) = 0$. Dunque $I = (X - a) \subseteq \ker(\psi_a)$, e per il teorema di omomorfismo per anelli ψ_a induce un omomorfismo di anelli $\alpha: K[X]/I \rightarrow K[X]$ tale che $\alpha(g + I) = \psi_a(g) = g(a)$ per ogni $g \in K[X]$. Inoltre $\pi \circ \alpha = \text{id}_{K[X]/I}$ perché per ogni $g \in K[X]$ esiste $q \in K[X]$ tale che $g = (X - a)q + g(a)$ (con $(X - a)q \in I$), e pertanto si ha

$$\pi \circ \alpha(g + I) = \pi(g(a)) = g(a) + I = g + I.$$

- (d) Per ipotesi esiste un omomorfismo di anelli $\alpha: K[X]/I \rightarrow K[X]$ tale che $\pi \circ \alpha = \text{id}_{K[X]/I}$. Poiché $K[X]$ è un dominio a ideali principali, l'ideale $I \neq \{0\}$, che è primo per il secondo punto, è anche massimale, e pertanto $K[X]/I$ è un campo. Allora

$$\alpha(K[X]/I \setminus \{I\}) = \alpha((K[X]/I)^*) \subseteq K[X]^* = K^*,$$

da cui segue $\text{im}(\alpha) \subseteq K$ (dato che $\alpha(I) = 0$). In particolare $a := \alpha(X + I) \in K$, e quindi $X + I = \pi(\alpha(X + I)) = \pi(a) = a + I$. Perciò $X - a \in I$, da cui segue $(X - a) \subseteq I$, e dunque (essendo sia $(X - a)$ che I massimali) $(X - a) = I = (f)$. Allora f e $X - a$ sono associati, e quindi $\deg(f) = \deg(X - a) = 1$.