Programma di Complementi di Algebra

A. A. 2024/2025

Docente: Alberto Canonaco

Richiami di teoria degli anelli (con unità, non necessariamente commutativi). Anello opposto A^{op} di un anello A; le nozioni destre di A corrispondono a quelle sinistre di A^{op}, e viceversa. Un elemento di A può essere invertibile a sinistra ma non a destra; se A non è banale e ogni elemento non nullo di A è invertibile a sinistra, allora A è con divisione. Esempi di anelli non commutativi: quaternioni $\mathbb{H}$ (con divisione); matrici quadrate $M_n(A)$ di ordine $n > 0$; endomorfismi $\mathrm{End}(G)$ di un gruppo abeliano G. Ogni anello non banale ha ideali sinistri, destri e bilateri massimali. Anelli semplici; un ideale (bilatero) $I \subseteq A$ è massimale se e solo se A/I è semplice. Un anello con divisione è semplice; il viceversa vale nel caso commutativo ma non in generale. Centro $Z(A)$ di un anello A; $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$; $Z(M_n(A)) \cong Z(A)$. Algebre su un anello commutativo e omomorfismi di algebre. Gli ideali di $M_n(A)$ sono tutti e soli della forma $M_n(I)$ con I ideale di A (dunque $M_n(A)$ è semplice se e solo se A lo è). Il centro di un anello semplice è un sottocampo; esempio di anello semplice centralmente infinito (cioè di dimensione infinita sul suo centro). Prodotto di anelli e sua proprietà universale.

Richiami di teoria dei moduli su un anello. Dare una struttura di A-modulo (sinistro) su un gruppo abeliano M equivale a dare un omomorfismo di anelli $A \to \mathrm{End}(M)$; gli A-moduli destri si identificano agli A^{op}-moduli sinistri. Sottomoduli; moduli semplici; A è semplice come A-modulo se e solo se è un anello con divisione. L'intersezione di sottomoduli, la somma di sottomoduli e il prodotto di un ideale sinistro per un sottomodulo sono sottomoduli. Sottomodulo generato da un sottoinsieme; moduli finitamente generati e moduli ciclici. Annullatore di un sottoinsieme di un modulo; l'annullatore è sempre un ideale sinistro; l'annullatore di un modulo è un ideale; moduli fedeli. Omomorfismi e isomorfismi di moduli; immagine e controimmagine di sottomoduli attraverso un omomorfismo di moduli sono sottomoduli. Quoziente M/M' di un modulo M per un sottomodulo M'; se I è un ideale sinistro di A, l'annullatore di A/I è il più grande ideale di A contenuto in I. I sottomoduli di M/M' sono tutti e soli della forma M''/M' con M'' sottomodulo di M contenente M'. Conucleo di un omomorfismo di moduli; il conucleo è nullo se e solo se l'omomorfismo è suriettivo. Teoremi di omomorfismo e di isomorfismo per moduli. Un A-modulo è ciclico (rispettivamente semplice) se e solo se è isomorfo a A/I per qualche ideale sinistro (rispettivamente sinistro massimale) I di A.

Prodotto e somma diretta di moduli e loro proprietà universali. Insiemi linearmente indipendenti in un modulo; basi di un modulo e moduli liberi; un A-modulo M è libero se e solo se è isomorfo a $A^{(\Lambda)}$ per qualche insieme Λ (la cui cardinalità, se dipende solo da M, è il rango di M); ogni modulo è isomorfo a un quoziente di un modulo libero. Restrizione degli scalari attraverso un omomorfismo di anelli; estensione degli scalari attraverso una proiezione al quoziente $A \to A/I$ (con I ideale di A); se il rango è ben definito per gli A/I-moduli liberi, lo è anche per gli A-moduli liberi.

Moduli noetheriani e moduli artiniani; dato un sottomodulo M' di un modulo M, M è noetheriano (rispettivamente artiniano) se e solo se M' e M/M' lo sono; un modulo è noetheriano se e solo se tutti i suoi sottomoduli sono finitamente generati. Anelli noetheriani e anelli artiniani a sinistra e/o a destra. Se A è noetheriano (rispettivamente artiniano) a sinistra, allora un A-modulo è noetheriano (rispettivamente artiniano) se e solo se è finitamente generato; se A è noetheriano (rispettivamente artiniano) a sinistra e $A \to B$ è un omomorfismo di anelli tale che B sia un A-modulo finitamente generato (in particolare, se $B = A/I$ per qualche ideale I di A), allora B è un anello noetheriano (rispettivamente artiniano) a sinistra. Serie di composizione di un modulo; un modulo ha una serie di composizione se e solo se è noetheriano e artiniano. Teorema di Jordan-Hölder: la lunghezza e i fattori di composizione (a meno dell'ordine e di isomorfismo) di una serie di composizione di un modulo noetheriano e artiniano non dipendono dalla serie.

Somma diretta di sottomoduli di un modulo; addendi diretti di un modulo; condizioni equivalenti perché un sottomodulo sia un addendo diretto. Moduli semisemplici; sottomoduli e quozienti di un modulo semisemplice sono semisemplici; un modulo è semisemplice se e solo se è somma (diretta) di sottomoduli semplici. Anelli semisemplici (a sinistra); tutti gli A-moduli sono semisemplici se e solo se A è semisemplice; se A non è banale, tutti gli A-moduli sono liberi se e solo se A è con divisione. Lemma di Schur; ogni modulo semisemplice è in modo essenzialmente unico una somma diretta di moduli semplici; il rango degli A-moduli liberi è ben definito se A è con divisione o commutativo e non banale. Un modulo semisemplice è somma diretta finita di moduli semplici se e solo se è finitamente generato se e solo se è noetheriano se e solo se è artiniano; se A è semisemplice, ci sono un numero finito di classi di isomorfismo degli A-moduli semplici, e queste coincidono con le classi di isomorfismo degli ideali sinistri minimali di A.

Bimoduli; se A e B sono due anelli, gli (A, B)-bimoduli possono essere identificati con i $(B^{\mathrm{op}}, A^{\mathrm{op}})$-bimoduli; A è in modo naturale un A-bimodulo (cioè un (A, A)-bimodulo); se A è commutativo, gli A-moduli (sinistri o destri) possono essere identificati con gli A-bimoduli simmetrici (cioè tali che $ax = xa$ per ogni $a \in A$ e per ogni x nel modulo). Gli omomorfismi tra due A-moduli M e N formano un gruppo abeliano $\mathrm{Hom}_A(M, N)$, che è anche un (B, C)-bimodulo se M è un (A, B)-bimodulo e N un (A, C)-bimodulo; in particolare, se A è una B-algebra, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ è un B-modulo e $\mathrm{End}_A(M) := \mathrm{Hom}_A(M, M)$ è una B-algebra; in ogni caso $\mathrm{Hom}_A(A, M)$ è un A-modulo isomorfo a M. Ogni A-modulo destro è in modo naturale un $(\mathrm{End}_A(M), A)$-bimodulo; analogamente ogni A-modulo sinistro è in modo naturale un $(A, \mathrm{End}_A(M))$-bimodulo con la convenzione che il prodotto in $\mathrm{End}_A(M)$ è l'opposto dell'usuale composizione; in questo modo $\mathrm{End}_A(A)$ è isomorfo a A come anello (oltre che come A-bimodulo) considerando A sia come A-modulo sinistro che come A-modulo destro. Anello di matrici triangolari associato a un (A, B)-bimodulo M; condizioni necessarie e sufficienti su A, B e M perché tale anello sia noetheriano o artiniano a sinistra (o a destra); esempio di anello notheriano e artiniano a sinistra ma non a destra.

Se D è un anello con divisione, allora $A := M_n(D)$ è semisemplice, $V := D^n$ è l'unico A-modulo semplice (a meno di isomorfismo), V è un A-modulo fedele, $A \cong V^n$ (come A-modulo) e $\mathrm{End}_A(V) \cong D$ (come anello); un prodotto finito di anelli semisemplici è semisemplice; teorema di Wedderburn-Artin (da cui segue che un anello è semisemplice a sinistra se e solo se lo è a destra). Un anello semplice è semisemplice se e solo se è artiniano a sinistra (o a destra) se e solo se è isomorfo a $M_n(D)$ per qualche $n > 0$ e qualche anello con divisione D (in particolare ciò vale per gli anelli semplici centralmente finiti); esempio di anello semplice ma non semisemplice.

Anello di gruppo AG (con A anello e G gruppo); corrispondenza tra gli AG-moduli e le rappresentazioni A-lineari di G. Teorema di Maschke: se A è semisemplice e l'ordine n di G è finito e invertibile in A, allora AG è semisemplice. Conseguenze: se K è un campo la cui caratteristica non divide n, allora tutte le rappresentazioni K-lineari di G sono completamente riducibili (cioè i KG-moduli corrispondenti sono semisemplici); se inoltre K è algebricamente chiuso, allora i gradi (cioè le dimensioni su K dei KG-moduli corrispondenti) $n_1, \dots, n_r$ delle rappresentazioni irriducibili (cioè quelle corrispondenti ai KG-moduli semplici) verificano $n = n_1^2 + \cdots + n_r^2$ (in particolare $r = n$ se e solo se $n_1 = \cdots = n_r = 1$ se e solo se G è abeliano).

Radicale di Jacobson $\mathrm{rad}(A)$ di un anello A e sue caratterizzazioni equivalenti; $\mathrm{rad}(A)$ è contenuto nell'intersezione degli ideali massimali di A, ma in generale l'inclusione può essere stretta. Se I è un ideale di A contenuto in $\mathrm{rad}(A)$, allora $\mathrm{rad}(A/I) = \mathrm{rad}(A)/I$. A è semisemplice se e solo se è J-semisemplice o semiprimitivo (cioè $\mathrm{rad}(A) = 0$) e artiniano a sinistra (o a destra). Anelli regolari (secondo von Neumann); ogni anello semisemplice è regolare (ma non viceversa) e ogni anello regolare è J-semisemplice (ma non viceversa). Ideali sinistri nil e ideali sinistri nilpotenti; ogni ideale sinistro nilpotente è nil (ma non viceversa); se I è un ideale sinistro nil di A, allora $I \subseteq \mathrm{rad}(A)$. Se A è artiniano a sinistra, allora $\mathrm{rad}(A)$ è nilpotente (quindi $\mathrm{rad}(A)$ è il più grande ideale nilpotente di A). Anelli semiprimari; un modulo su un anello semiprimario è noetheriano se e solo se è artiniano; teorema di Hopkins-Levitzki. Un anello commutativo e semiprimario ha dimensione ≤ 0 (cioè tutti i suoi ideali primi sono massimali); in un anello commutativo e noetheriano 0 è un prodotto finito di ideali primi; un anello commutativo è artiniano se e solo se è noetheriano e ha dimensione 0. Lemma di Nakayama.

Anelli locali e loro caratterizzazioni equivalenti; un anello non banale è locale se ogni elemento non invertibile è nilpotente; idempotenti in un anello; in un anello locale gli unici idempotenti sono quelli banali. Moduli indecomponibili; ogni modulo noetheriano o artiniano è somma diretta finita di indecomponibili. Un A-modulo non nullo M è indecomponibile se e solo gli unici idempotenti di $\mathrm{End}_A(M)$ sono quelli banali; teorema di decomposizione di Fitting; moduli fortemente indecomponibili; un modulo fortemente indecomponibile è indecomponibile (ma non viceversa); un modulo noetheriano, artiniano e indecomponibile è fortemente indecomponibile; teorema di Krull-Schmidt-Azumaya e teorema di Krull-Schmidt. Teorema di struttura per moduli finitamente generati su un dominio a ideali principali.

Moduli proiettivi; una somma diretta di moduli è proiettiva se e solo se lo è ogni addendo; un modulo è proiettivo se e solo se è addendo diretto di un modulo libero; tutti gli A-moduli sono proiettivi se e solo se A è semisemplice; su un anello locale ogni modulo proiettivo e finitamente generato è libero. Moduli stabilmente liberi; libero implica stabilmento libero implica proiettivo (ma non viceversa). Anelli semilocali; un anello locale o semiprimario è semilocale; un anello A con un numero finito di ideali sinistri massimali è semilocale, e il viceversa vale se $A/\mathrm{rad}(A)$ è commutativo (ma non in generale); un prodotto di anelli semilocali è semilocale; un quoziente di un anello semilocale è semilocale. Il rango dei moduli liberi su un anello semilocale non banale è ben definito; in un anello semilocale ogni elemento invertibile a sinistra è invertibile; teorema di Bass. Teorema di cancellazione di Evans: se M, N e N' sono A-moduli tali che $M \oplus N \cong M \oplus N'$ e $\mathrm{End}_A(M)$ è semilocale, allora $N \cong N'$. Su un anello semilocale ogni modulo stabilmente libero e finitamente generato è libero.

Ideali primi e loro caratterizzazioni equivalenti; anelli primi; un anello è un dominio se e solo se è ridotto (cioè 0 è l'unico nilpotente) e primo. Sistemi moltiplicativi e m-sistemi; un ideale è primo se e solo se il suo complementare è un m-sistema; ogni ideale massimale tra quelli disgiunti da un m-sistema è primo (in particolare ogni ideale massimale è primo). Per ogni ideale I di un anello A l'intersezione degli ideali primi di A che contengono I coincide con l'insieme $\sqrt{I}$ degli $a \in A$ tali che ogni m-sistema contenente a ha intersezione con I non vuota; $\sqrt{I}$ è contenuto nell'insieme degli elementi di A una cui potenza appartiene a I, e l'inclusione è un'uguaglianza se A è commutativo (ma non in generale). Nilradicale inferiore $\mathrm{Nil}_*(A) = \sqrt{0}$ di un anello A. La somma di un ideale nil e di un ideale sinistro nil è nil, quindi il nilradicale superiore $\mathrm{Nil}^*(A)$ di un anello A è ben definito come il più grande ideale nil di A; valgono sempre le inclusioni $\mathrm{Nil}_*(A) \subseteq \mathrm{Nil}^*(A) \subseteq \mathrm{Nil}(A)$ (con $\mathrm{Nil}(A)$ insieme degli elementi nilpotenti di A), e sono uguaglianze se A è commutativo (ma non in generale); $\mathrm{Nil}^*(A) \subseteq \mathrm{rad}(A)$ e l'inclusione in generale non è un'uguaglianza anche se A è commutativo; se A è artiniano a sinistra, allora $\mathrm{Nil}_*(A) = \mathrm{Nil}^*(A) = \mathrm{rad}(A)$. La congettura di Köthe e alcune sue formulazioni equivalenti.

Ideali semiprimi e loro caratterizzazioni equivalenti. n-sistemi; un ideale è semiprimo se e solo se il suo complementare è un n-sistema; ogni elemento di un n-sistema S appartiene a un m-sistema contenuto in S; un ideale I è semiprimo se e solo se è interesezione di ideali primi se e solo se $I = \sqrt{I}$. Anelli semiprimi; A è semiprimo se e solo se $\mathrm{Nil}_*(A) = 0$ se e solo se 0 è l'unico ideale nilpotente di A se e solo se 0 è l'unico ideale sinistro nilpotente di A. Se A è noetheriano a sinistra, allora $\mathrm{Nil}_*(A) = \mathrm{Nil}^*(A)$ e la congettura di Köthe è vera per A; teorema di Levitzki.

Anelli primitivi a sinistra (o a destra); se D è un anello con divisione e V è un D-modulo non nullo, allora $\mathrm{End}_D(V)$ è un anello primitivo a sinistra; un anello A è semiprimitivo se e solo se esiste un A-modulo semisemplice e fedele (quindi ogni anello primitivo a sinistra è semiprimitivo). Per un anello si ha: semplice implica primitivo a sinistra (o a destra) implica primo e semisemplice implica semiprimitivo implica semiprimo, e i viceversa valgono se l'anello è artiniano a sinistra (ma non in generale). Azione densa di un anello A su un B-modulo destro M quando M è un (A, B)-bimodulo; teorema di densità di Jacobson-Chevalley; insiemi densi di trasformazioni lineari su D-moduli (con D anello con divisione); dato un (A, D)-bimodulo M, A agisce densamente su M se e solo se l'immagine dell'omomorfismo naturale di anelli $A \to \mathrm{End}_D(M)$ è un anello denso di trasformazioni lineari su M; teorema di struttura per anelli primitivi a sinistra. Ideali primitivi a sinistra; un ideale I di A è primitivo a sinistra se e solo se esiste un A-modulo semplice il cui annullatore è I; $\mathrm{rad}(A)$ è l'intersezione degli ideali primitivi a sinistra (o a destra). Prodotti sottodiretti di anelli; un anello è semiprimo (semiprimitivo) se e solo se è prodotto sottodiretto di anelli primi (primitivi a sinistra).

Ogni dominio finito (in particolare ogni sottoanello finito di un dominio) è un anello con divisione; teorema di Wedderburn; se D è un campo o un anello con divisione di caratteristica positiva, allora ogni sottogruppo finito di D^* è ciclico; D è un campo se $ab - ba \in Z(D)$ per ogni $a, b \in D$; lemma di Herstein; teorema di Jacobson-Herstein e teorema di Jacobson. K-algebre algebriche (con K campo); se K è algebricamente chiuso, a meno di isomorfismo K è l'unica K-algebra algebrica con divisione; se K è finito, ogni K-algebra algebrica con divisione è un campo; teorema di Frobenius. Anello $A((X))$ delle serie di Laurent a coefficienti in un anello A; anello $A((X; \sigma))$ delle serie di Laurent twistate tramite un automorfismo σ di A; $A((X; \sigma))$ è con divisione se e solo se A lo è. Se K è un campo e σ è un automorfismo di K con campo fisso K_0, allora $Z(K((X; \sigma)))$ è K_0 se σ ha ordine infinito, mentre è $K_0((X^n))$ se σ ha ordine finito n; esempio di anello con divisione centralmente infinito.

Richiami sul prodotto tensoriale di moduli su un anello commutativo A; sua esistenza, unicità, commutatività e associatività a meno di isomorfismo; $A \otimes_A M \cong M$ per ogni A-modulo M. Dati A-moduli N_λ $(\lambda \in \Lambda)$, $M \otimes (\oplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda) \cong$

$\oplus_{\lambda\in\Lambda}(M \otimes N_\lambda)$ (quindi $M \otimes_A N$ è un A-modulo libero di rango mn se M e N lo sono di ranghi m e n). Un omomorfismo di A-moduli $f\colon N \to N'$ induce un omomorfismo $f_*\colon M \otimes_A N \to M \otimes_A N'$; f_* è suriettivo se f lo è; f_* è iniettivo se f lo è e A è un campo (ma non in generale). Dato un omomorfismo di anelli $A \to A'$, $A' \otimes_A M$ è anche un A'-modulo (estensione degli scalari attraverso $A \to A'$). Se B e C sono due A-algebre, $B \otimes_A C$ è in modo naturale una A-algebra; dare un omomorfismo di A-algebre $B \otimes_A C \to D$ equivale a dare due omomorfismi di A-algebre $f\colon B \to D$ e $g\colon C \to D$ tali che $f(b)g(c) = g(c)f(b)$ per ogni $b \in B$ e per ogni $c \in C$; dare un (B, C)-bimodulo che per restrizione degli scalari sia un A-bimodulo simmetrico equivale a dare un $B^{\mathrm{op}} \otimes_A C$-modulo destro.

Se A è una K-algebra (con K campo) e B e C sono K-sottoalgebre di A con B centrale (cioè $Z(B) = K$) e semplice e $bc = cb$ per ogni $b \in B$ e per ogni $c \in C$, allora ogni sottoinsieme finito e K-linearmente indipendente di B è anche C-linearmente indipendente. Se B e C sono K-algebre, allora $Z(B \otimes_K C) = Z(B) \otimes_K Z(C)$; se inoltre B è centrale e semplice e C è (centrale e) semplice, allora $B \otimes_K C$ è (centrale e) semplice. Se A e B appartengono alla classe $\mathcal{S}(K)$ delle K-algebre centrali, semplici e finite, anche $A \otimes_K B \in \mathcal{S}(K)$. Su $\mathcal{S}(K)$ la relazione $A \sim B$ se esistono $D \in \mathcal{S}(K)$ anello con divisione e interi positivi m e n tali che $A \cong M_m(D)$ e $B \cong M_n(D)$ è di equivalenza; $A \sim B$ se e solo se esistono interi positivi m' e n' tali che $A \otimes_K M_{m'}(K) \cong B \otimes_K M_{n'}(K)$. L'insieme quoziente $\mathrm{Br}(K) := \mathcal{S}(K)/\sim$ (che si identifica alle classi di isomorfismo degli anelli con divisione in $\mathcal{S}(K)$) è un gruppo abeliano (detto gruppo di Brauer di K) con operazione $[A][B] := [A \otimes_K B]$ (l'elemento neutro è $[K]$ e l'inverso di $[A]$ è $[A^{\mathrm{op}}]$); un'estensione di campi $K \subseteq L$ induce un omomorfismo di gruppi $\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(L)$, $[A] \mapsto [L \otimes_K A]$. Per ogni anello con divisione $D \in \mathcal{S}(K)$ esiste $n > 0$ tale che $\dim_K(D) = n^2$; inoltre $n = \dim_K(L)$ per ogni sottocampo massimale L di D contenente K. $\mathrm{Br}(K)$ è banale se K è algebricamente chiuso o finito; $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.