Corso di Algebra 1 - a.a. 2023-2024

Prova scritta del 03/09/2024

1. Dato un sottogruppo H di un gruppo G, sia
$$Z_G(H) := \{a \in G \,:\, ab = ba \ \forall b \in H\}.$$
   (a) Dimostrare che $Z_G(H)$ è un sottogruppo di G.
   (b) Dimostrare che, se H è normale in G, allora $Z_G(H)$ è normale in G.
   (c) Dimostrare che, se H è normale in G, allora $G/Z_G(H)$ è isomorfo a un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(H)$.
   (d) Esiste un sottogruppo non normale H di D_4 tale che $Z_{D_4}(H)$ sia normale in D_4?

2. Diciamo che un anello A è *regolare* se per ogni $a \in A$ esiste $b \in A$ tale che $aba = a$.
   (a) Dimostrare che un anello con divisione è regolare.
   (b) Dimostrare che un dominio regolare è un campo.
   (c) Dimostrare che, se A è un anello commutativo e esiste $a \in A \setminus \{0\}$ tale che $a^k = 0$ per qualche $k > 1$, allora A non è regolare.
   (d) Per quali $n \in \mathbb{Z}$ l'anello $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + X^2 + nX - 1)$ è regolare?

Soluzioni

1. (a) Dato $a \in G$, per definizione si ha $a \in Z_G(H)$ se e solo se $a \in C(b)$ per ogni $b \in H$, dove $C(b) := \{g \in G : gb = bg\}$ indica il centralizzatore di b in G (che è un sottogruppo di G). Dunque

$$Z_G(H) = \bigcap_{b \in H} C(b)$$

è un sottogruppo di G in quanto intersezione di sottogruppi di G.

Indichiamo, per ogni $a \in G$, con $\gamma_a \colon G \to G$ l'automorfismo interno di G definito da $\gamma_a(g) := aga^{-1}$. Assumendo che H sia normale in G, si ha $H = aHa^{-1} = \gamma_a(H)$, e pertanto la restrizione $\gamma'_a := \gamma_a|_H \colon H \to H$ è un automorfismo di H per ogni $a \in G$. Si ottiene allora una funzione

$$\begin{aligned} \Gamma' \colon G &\to \mathrm{Aut}(H) \\ a &\mapsto \gamma'_a \end{aligned}$$

che in effetti è un omomorfismo. Per dimostrare ciò va verificato che $\Gamma'(ab) = \Gamma'(a) \circ \Gamma'(b)$, cioè che $\gamma'_{ab} = \gamma'_a \circ \gamma'_b$ per ogni $a, b \in G$. Quest'ultima uguaglianza vale perché

$$\gamma'_{ab}(h) = (ab)h(ab)^{-1} = a(bhb^{-1})a^{-1} = \gamma'_a(\gamma'_b(h)) = (\gamma'_a \circ \gamma'_b)(h)$$

per ogni $h \in H$.

(b) Dati $a \in G$ e $b \in H$, si ha $ab = ba$ se e solo se $b = aba^{-1} = \gamma'_a(b)$. Da questo si deduce che $a \in Z_G(H)$ se e solo se $\gamma'_a = \mathrm{id}_H$ se e solo se $a \in \ker(\Gamma')$. Allora $Z_G(H) = \ker(\Gamma')$ è un sottogruppo normale di G perché nucleo di un omomorfismo.

(c) Per il primo teorema di isomorfismo e grazie al punto precedente si ottiene

$$G/Z_G(H) = G/\ker(\Gamma') \cong \mathrm{im}(\Gamma')$$

e $\mathrm{im}(\Gamma')$ è un sottogruppo di $\mathrm{Aut}(H)$.

(d) Sì, per esempio $H := \langle S \rangle = \{1, S\}$. Infatti H non è normale in D_4 perché $RSR^{-1} = R^2S \notin H$. D'altra parte $H \subseteq Z_{D_4}(H)$ (essendo H abeliano), e in realtà $H \subsetneq Z_{D_4}(H)$ (perché per esempio $R^2 \in Z_{D_4}(H) \setminus H$). Perciò $\#Z_{D_4}(H) > \#H = 2$, e quindi $\#Z_{D_4}(H)$ (che in ogni caso è un divisore di $\#D_4 = 8$ per il teorema di Lagrange) può essere solo 4 o 8. Questo implica $[D_4 : Z_{D_4}(H)] = 2$ o 1, e pertanto $Z_{D_4}(H)$ è normale in D_4. Più precisamente è anche facile vedere che $Z_{D_4}(H) = \{1, S, R^2, R^2S\}$.

2. (a) Se A è un anello con divisione e $a \in A \setminus \{0\} = A^*$, prendendo $b = a^{-1}$ si trova $aba = aa^{-1}a = a$. Se invece $a = 0$, ovviamente per ogni $b \in A$ risulta $aba = 0b0 = 0 = a$.

   (b) Se A è un dominio regolare, per ogni $a \in A \setminus \{0\}$ per ipotesi esiste $b \in A$ tale che $aba = a$, cioè $a(ba - 1) = 0$. Essendo A un dominio e $a \neq 0$, questo implica $ba = 1$, e quindi $a \in A^*$ (con $a^{-1} = b$). Ciò dimostra che A è un campo.

   (c) Supponiamo per assurdo che A sia commutativo regolare e che esista $a \in A \setminus \{0\}$ tale che $a^k = 0$ per qualche $k > 1$. Esiste allora $m := \min\{k > 0 : a^k = 0\}$ e si ha $m \geq 2$ (dato che $a^1 = a \neq 0$) e ovviamente $a^{m-1} \neq 0$. Essendo A regolare, esiste $b \in A$ tale che $a^{m-1}ba^{m-1} = a^{m-1} \neq 0$. Poiché A è commutativo, $a^m = 0$ e $m \geq 2$, si ottiene la contraddizione

$$a^{m-1}ba^{m-1} = a^{m-1}aba^{m-2} = a^m ba^{m-2} = 0ba^{m-2} = 0.$$

   (d) L'anello è regolare se e solo se $n \neq -1$. Infatti, avendo grado 3, il polinomio $f_n := X^3 + X^2 + nX - 1$ è irriducibile in $\mathbb{Q}[X]$ se e solo se non ha radici razionali. D'altra parte le eventuali radici razionali di f_n possono essere solo 1 o -1. Poiché $f_n(1) = n + 1$ e $f_n(-1) = -n - 1$ se ne deduce che f_n ha radici razionali se e solo se $n = -1$. Pertanto f_n è irriducibile per $n \neq -1$, e in tal caso $\mathbb{Q}[X]/(f_n)$ è un campo (essendo $\mathbb{Q}[X]$ un dominio a ideali principali, l'ideale (f_n) è massimale), e quindi è regolare per il primo punto. Invece per $n = -1$ si ha $f_{-1} = (X - 1)(X + 1)^2$ e, posto $g := (X - 1)(X + 1)$, nell'anello commutativo $\mathbb{Q}[X]/(f_{-1})$ l'elemento $\bar{g} := g + (f_{-1})$ è tale che $\bar{g} \neq \bar{0}$ (perché $g \notin (f_{-1})$) e $\bar{g}^2 = \bar{0}$ (perché $g^2 = (X - 1)f_{-1} \in (f_{-1})$). Si conclude allora che $\mathbb{Q}[X]/(f_{-1})$ non è regolare per il punto precedente.