

Teoremi sulla permanenza del segno

Come succede per la definizione di limite, l'idea di base della *permanenza del segno* è sostanzialmente una sola, anche se risulta difficile esprimerla in un unico teorema. Qui prenderemo prima in esame un semplice caso particolare, con la speranza che anche le mucche riescano, dal caso particolare, a intravedere l'idea generale che sarà poi esposta, molto succintamente, nel seguito.

Il risultato di base

Enunciato Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e sia ℓ un numero reale **positivo**. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell. \quad (1)$$

Allora (questa è la tesi, mucche) si ha che esiste un $\delta > 0$ tale che per tutti gli x (diversi da x_0) che distano da x_0 per meno di δ i valori di $f(x)$ siano positivi. In linguaggio matematico questo si esprime dicendo

$$\exists \delta > 0 : \forall x \quad \{0 < |x - x_0| \leq \delta\} \Rightarrow \{f(x) > 0\}. \quad (2)$$

Dimostrazione Ricordando la definizione di limite si ha che (1) equivale a

$$\forall \varepsilon \geq 0 \exists \delta > 0 : \forall x \quad \{0 < |x - x_0| \leq \delta\} \Rightarrow \{|f(x) - \ell| \leq \varepsilon\}. \quad (3)$$

Osserviamo che la disuguaglianza $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ è del tutto equivalente a

$$\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon. \quad (4)$$

Siccome ε è a **nostra scelta** (stiamo *usando* la (3), mucche! Non la stiamo *dimostrando*!) è sufficiente prendere un ε positivo (perché dobbiamo) e strettamente minore di ℓ (perché siamo furbi) per avere $\ell - \varepsilon > 0$. Quindi la prima disuguaglianza di (4) implicherà

$$f(x) \geq \ell - \varepsilon > 0 \quad (5)$$

(e la seconda disuguaglianza di (4) la buttiamo via: è vera ma non ci serve). Per esempio possiamo prendere $\varepsilon = \ell/2$, che va sempre bene quando ℓ (come abbiamo messo nelle ipotesi) è positivo. Riassumendo, se usiamo la (3) con $\varepsilon = \ell/2$ otteniamo

$$\exists \delta > 0 : \forall x \quad \{0 < |x - x_0| \leq \delta\} \Rightarrow \{f(x) \geq \ell - \varepsilon = \ell/2 > 0\}, \quad (6)$$

che è esattamente la tesi (2). Le mucche annuiscono vigorosamente.

Osservazione 1 Osserviamo che, con un linguaggio più colloquiale, l'enunciato precedente può essere speso come **se il limite è positivo, allora $f(x)$, per x in un intorno di x_0 (ma diverso da x_0 !), è tutta positiva**.

Osservazione 2 Ovviamente, potremmo enunciare e dimostrare un risultato analogo per i casi in cui il limite è negativo: **se il limite è negativo, allora $f(x)$, per x in un intorno di x_0 (ma diverso da x_0 !) è tutta negativa**. Per la dimostrazione basterebbe cambiare di segno alla successione (e quindi al suo limite), riconducendosi al caso già dimostrato.

Nella maggioranza delle applicazioni (cioè nel dimostrare i teoremi successivi) la proprietà della permanenza del segno viene usata in una forma leggermente diversa, anche se equivalente. Si ha infatti il seguente corollario.

Corollario Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se, in tutto un intorno di x_0 (escludendo eventualmente x_0), gli $f(x)$ sono tutti ≥ 0 allora (tesi): il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 , se esiste, è anch'esso ≥ 0 .

Dimostrazione La tesi equivale a dire che la f non può avere un limite negativo (le mucche ci pensano sopra, ma alla fine si dicono d'accordo). Ma questo è ovvio: se avesse un limite negativo, grazie alla Osservazione 2, in tutto un intorno di x_0 (escludendo x_0) gli $f(x)$ sarebbero negativi, il che è impossibile: infatti per ipotesi sappiamo che in un intorno di x_0 (escludendo eventualmente x_0) gli $f(x)$ sono tutti ≥ 0 .

Il risultato del corollario precedente (e del risultato analogo che si otterrebbe cambiando i segni) diventa più semplice (e più comodo da usare) nel caso delle funzioni continue. Vediamolo.

Permanenza del segno per le funzioni continue Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Se f è continua in x_0 , e se $f(x_0)$ è diverso da zero (e quindi ha un segno), allora la funzione mantiene lo stesso segno di $f(x_0)$ in tutto un intorno di x_0 .

Cenni all'idea generale

Riprendiamo la formula vista nella *definizione di limite negli altri casi*

$$\lim_{x \rightarrow \clubsuit} f(x) = \diamond. \quad (7)$$

Nei vari casi, $\diamond$ potrà essere: ℓ , $+\infty$, $-\infty$, ∞ , mentre $\clubsuit$ potrà essere x_0 , x_0+ , x_0- , $+\infty$, $-\infty$, ∞ .

Il teorema della permanenza del segno può allora essere formulato, succintamente, come:

Se $\diamond$ è positivo (risp. negativo) allora la f è positiva (risp. negativa) in tutto un intorno di $\clubsuit$ (escludendo, eventualmente, $\clubsuit$).

Inoltre, per le funzioni continue, si ha: se f è continua in x_0 (oppure f è continua a destra in x_0 , oppure f è continua a sinistra in x_0), allora in tutto un intorno di x_0 (oppure, rispettivamente, in tutto un intorno destro o in tutto un intorno sinistro) $f(x)$ ha lo stesso segno di $f(x_0)$.