

Teorema dei Carabinieri

Per semplicità consideriamo dapprima il caso di funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, e studiamo il limite destro. L'estensione ad altri casi verrà considerata nel seguito.

Enunciato Siano p , f e g tre funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Sia infine $L \in \mathbb{R}$. Supponiamo che si abbia

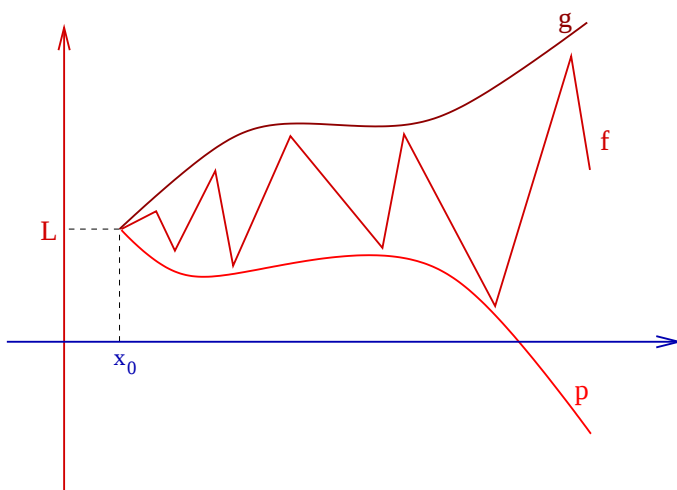
$$(1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad p(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} p(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+} g(x) = L$$

Allora si avrà anche

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = L$$

□



Dimostrazione. Applichiamo ai due limiti che appaiono in (2) la definizione di limite. Avremo:

$$(4) \quad \forall \varepsilon_p > 0 \exists \delta_p > 0 \forall x \in]x_0, x_0 + \delta_p[: \quad p(x) \in]L - \varepsilon_p, L + \varepsilon_p[,$$

$$(5) \quad \forall \varepsilon_g > 0 \exists \delta_g > 0 \forall x \in]x_0, x_0 + \delta_g[: \quad g(x) \in]L - \varepsilon_g, L + \varepsilon_g[.$$

La tesi che dobbiamo dimostrare sarà invece

$$(6) \quad \forall \varepsilon_f > 0 \exists \delta_f > 0 \forall x \in]x_0, x_0 + \delta_f[: \quad f(x) \in]L - \varepsilon_f, L + \varepsilon_f[.$$

Supponiamo quindi di avere un $\varepsilon_f > 0$, e prendiamo in (4) e in (5)

$$(7) \quad \varepsilon_p := \varepsilon_f \quad \text{e} \quad \varepsilon_g := \varepsilon_f.$$

Con tali valori di ε_p e ε_g in (4) e in (5) (rispettivamente) otterremo un $\delta_p > 0$ e un $\delta_g > 0$. Prendiamo quindi

$$(8) \quad \delta_f := \min\{\delta_p, \delta_g\}$$

(che risulterà anch'esso > 0). Avremo allora dalla (8) che ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta_f[$ appartiene sia a $]x_0, x_0 + \delta_p[$ che a $]x_0, x_0 + \delta_g[$ e quindi dalle (4) e (5) avremo rispettivamente

$$p(x) \in]L - \varepsilon_p, L + \varepsilon_p[\quad \text{e} \quad g(x) \in]L - \varepsilon_g, L + \varepsilon_g[$$

che sfruttando la (7) ci dicono che, sempre per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta_f[$,

$$(9) \quad \text{entrambi } p(x) \text{ e } g(x) \text{ appartengono a }]L - \varepsilon_f, L + \varepsilon_f[.$$

A questo punto utilizziamo la (1) per dedurre che, sempre per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta_f[$, anche $f(x)$ appartiene a $]L - \varepsilon_f, L + \varepsilon_f[$. Riassumendo: per ogni $\varepsilon_f > 0$ abbiamo trovato un $\delta_f > 0$ tale che per ogni $x \in]x_0, x_0 + \delta_f[$, si ha $f(x) \in]L - \varepsilon_f, L + \varepsilon_f[$. Cioè *abbiamo dimostrato la (6)*. $\square$

Osserviamo a questo punto che potremmo supporre che la p e la g abbiano entrambe limite per $x \rightarrow x_0+$, ma ammettendo che possano tendere a limiti diversi (diciamo, a L_p e L_g rispettivamente). A questo punto la (1) ci direbbe solo che $L_p \leq L_g$ (usando il teorema della permanenza del segno) ma non ci direbbe nulla sulla f , che potrebbe continuare a oscillare tra i due valori L_p e L_g . Ad esempio la p potrebbe essere identicamente uguale a -1 e la g potrebbe essere identicamente uguale a 1 e la f , per $x \neq x_0 = 0$, potrebbe essere data da $f := \sin(1/x)$. L'utilità del teorema sta invece proprio nel dirci che, se L_p e L_g sono uguali, allora la f è *obbligata ad avere limite* (e in particolare tale limite coincide col valore comune di L_p e L_g).

Osserviamo che ovviamente non è necessario che le tre funzioni siano definite in tutto $\mathbb{R}$: basta che siano definite in un intorno destro (aperto) di x_0 . E anche se lo fossero, non sarebbe comunque necessario avere la (1) in tutto $\mathbb{R}$, ma solo in un intorno destro (aperto) di x_0 .

Osserviamo infine che il teorema ammette delle ovvie estensioni al caso di $x \rightarrow x_0-$ o al caso di $x \rightarrow x_0$