

Teorema di Weierstrass (con massimi e minimi)

Enunciato Sia $f \in C^0([a, b])$. Allora esistono x_m e x_M in $[a, b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \quad \forall x \in [a, b]. \quad (1)$$

Dimostrazione

Dimostriamo che l'esistenza di x_M . Con un ragionamento analogo si può dimostrare l'esistenza di x_m . Per tutti gli $y \in \mathbb{R}$ costruiamo l'insieme

$$\mathcal{M}_y = \{x \in [a, b] \text{ tali che } f(x) \geq y\}. \quad (2)$$

Avremo ovviamente che se $y_1 < y_2$ allora

$$\mathcal{M}_{y_2} \subseteq \mathcal{M}_{y_1}. \quad (3)$$

Sia \mathbb{Y} l'insieme degli y per i quali \mathcal{M}_y è non vuoto. Per ogni $y \in \mathbb{Y}$ definiamo

$$\alpha(y) := \inf \mathcal{M}_y. \quad (4)$$

La funzione α è sicuramente limitata; infatti $a \leq \alpha(y) \leq b$ per ogni $y \in \mathbb{Y}$. Inoltre per la (3) abbiamo che la funzione α è monotona non decrescente. Infine per il Lemma della montagnetta abbiamo

$$f(\alpha(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{Y} \text{ con } y \geq f(a). \quad (5)$$

Poniamo $\alpha^* := \sup_{y \in \mathbb{Y}} \alpha(y)$, che sicuramente sta in $[a, b]$ (perché?). Supponiamo che \mathbb{Y} non sia limitato superiormente (questo dovrebbe portarci a una contraddizione). Se così fosse, infatti, avremmo

$$\alpha^* := \lim_{y \rightarrow +\infty} \alpha(y) \quad (6)$$

da cui, per il teorema sui limiti delle funzioni composte (usando la (5) nell'ultimo passaggio):

$$f(\alpha^*) := \lim_{y \rightarrow +\infty} f(\alpha(y)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} y = +\infty \quad (7)$$

che è impossibile: $f(\alpha^*)$ è un numero reale e non può essere uguale a $+\infty$. Quindi \mathbb{Y} è limitato superiormente (e in particolare deduciamo che la f è limitata superiormente). Chiamiamo y^* l'estremo superiore di \mathbb{Y} , che coinciderà con l'estremo superiore della immagine di f . Cerchiamo quindi un x_M tale che $f(x_M) = y^*$. Se per caso $f(a) = y^*$ possiamo prendere $x_M := a$. Se invece $y^* > f(a)$ procediamo come segue: osserviamo dapprima che adesso, invece della (7), abbiamo

$$\alpha^* := \lim_{y \rightarrow y^*} \alpha(y). \quad (8)$$

Poi applichiamo il teorema sul limite delle funzioni composte alla (8), osservando che per $y > f(a)$ si ha $f(\alpha(y)) = y$ (dalla (5)). Quindi

$$f(\alpha^*) := \lim_{y \rightarrow y^*} f(\alpha(y)) = \lim_{y \rightarrow y^*} y = y^*. \quad (9)$$

Possiamo quindi porre $x_M := \alpha^*$.