Teorema dell'esistenza dei massimi e dei minimi

Enunciato Sia $f \in C^0([a,b])$. Allora esistono x_m e x_M in $[a,b]$ tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{1}$$

Dimostrazione

Dimostreremo l'esistenza di x_M. Con un ragionamento analogo si può dimostrare l'esistenza di x_m. Supponiamo anche di avere già dimostrato il teorema di Weirestrass (per una dimostrazione che non usa il teorema di Weierstrass, ma anzi lo include, si veda Weierstrass (con max e min)). Quindi "sappiamo già" che una funzione continua su un intervallo chiuso è limitata.

Sia y^* l'estremo superiore della immagine di f. Dobbiamo dimostrare che esiste un x_M tale che $f(x_M) = y^*$. Tanto per cominciare, abbiamo ovviamente $f(x) \leq y^*$ per ogni $x \in [a,b]$. Dobbiamo escludere che sia

$$f(x) < y^* \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{2}$$

Se la (2) fosse vera, potremmo, per ogni $x \in [a,b]$, definire la funzione ausiliaria

$$g(x) := \frac{1}{y^* - f(x)} \tag{3}$$

che risulterebbe essere una funzione continua su tutto $[a,b]$. In quanto tale la g sarebbe superiormente limitata, cioè esisterebbe un M tale che

$$M \geq g(x) \equiv \frac{1}{y^* - f(x)} \qquad \forall\, x \in [a,b]. \tag{4}$$

Ma allora si avrebbe, dalla (4)

$$f(x) \leq y^* - \frac{1}{M}, \tag{5}$$

e quindi $y^* - 1/M$ sarebbe un maggiorante della immagine di f più piccolo di y^*. Il che è impossibile, perché y^* (essendo l'estremo superiore) è *il più piccolo dei maggioranti.* Ne concludiamo che la (2) nonè vera, e quindi esiste un x_M tale che $f(x_M) = y^*$.