Teorema di Bolzano-Weierstrass

Enunciato Sia $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una successione di numeri reali **limitata**. Allora x ha una sottosuccessione convergente.

Preliminari

Dire che la successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è limitata equivale a dire che esistono a e b in $\mathbb{R}$ tali che

$$a \leq x_n \leq b \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dire che la successione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ha una sottosuccessione convergente equivale a dire che esistono: una applicazione $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente (detta "funzione di scelta) e un numero reale ℓ tali che

$$\lim_{k \to +\infty} x_{s(k)} = \ell. \tag{2}$$

Osserviamo anche, prima di cominciare la dimostrazione, che (quasi) tutto il gioco andrà fatto sugli indici n e non sulle loro immagini x_n. Infatti gli indici sono in numero infinito, e tutti diversi tra loro $(0, 1, 2, 3...)$ mentre le loro immagini potrebbero coincidere tutte in un solo punto (se la x fosse una successione costante, anche se in questo caso la tesi sarebbe ovvia prendendo come s l'identità) oppure raggrupparsi in un numero finito di punti, se ad esempio la successione x fosse data da $x_n := (-1)^n$: in questo caso l'immagine della successione x sarebbe fatta dai due punti 1 e -1. La tesi sarebbe comunque vera, ad esempio prendendo $s(k) := 2k$ (e $\ell = 1$) oppure $s(k) := 2k + 1$ (e $\ell = -1$). Controllate che sia vero...

Dimostrazione Per fare la dimostrazione dovremo costruire *tre successioni*: una successione di sotto-intervalli $[a_k, b_k]$ di $[a, b]$, una successione di **insiemi** di indici $I_k \subset \mathbb{N}$ e infine la successione di indici $s(k)$.

Cominciamo col caso $k = 0$ e poniamo

$$I_0 := \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$a_0 := a \qquad b_0 := b, \tag{4}$$

$$s(0) := 0 \, (= \text{ minimo indice contenuto in } I_0). \tag{5}$$

Osserviamo che, grazie alla (1) e alle (3)-(5) abbiamo che

$$I_0 \text{ contiene infiniti indici} \tag{6}$$

$$\forall\, n \in I_0 \quad x_n \in [a_0, b_0] \tag{7}$$

$$s(0) \in I_0 \tag{8}$$

A questo punto dobbiamo costruire l'intervallo $[a_1, b_1]$, l'insieme di indici I_1 e l'indice $s(1)$. Cominciamo da $[a_1, b_1]$: prendiamo il punto medio $m_0 = (a_0 + b_0)/2$ e suddividiamo $[a_0, b_0]$ in due sottointervalli di uguale lunghezza $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$. Ricordiamo che I_0 *contiene infiniti indici*, e le corrispondenti immagini sono tutte in $[a_0, b_0]$. Quindi almeno uno dei due sottointervalli $[a_0, m_0]$ e $[m_0, b_0]$ conterrà **le immagini** di infiniti indici. Scegliamo allora $[a_1, b_1]$ nel modo seguente:

- *se* $[a_0, m_0]$ *contiene* **le immagini** *di infiniti indici allora poniamo*

$$[a_1, b_1] := [a_0, m_0]; \tag{9}$$

- *altrimenti poniamo*

$$[a_1, b_1] := [m_0, b_0]. \tag{10}$$

Osserviamo che, per come abbiamo fatto la costruzione, valgono le seguenti tre proprietà

$$[a_1, b_1] \subset [a_0, b_0] \text{ e quindi } a_1 \geq a_0 \text{ e } b_1 \leq b_0 \tag{11}$$

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2} = \frac{b - a}{2^0} \tag{12}$$

$$[a_1, b_1] \text{ contiene le immagini di infiniti indici.} \tag{13}$$

Avendo scelto $[a_1, b_1]$ procediamo alla scelta di I_1 e di $s(1)$. Poniamo:

$$I_1 := \{n > s(0) |\ x_n \in [a_1, b_1]\} \tag{14}$$

$$s(1) := \text{ minimo indice contenuto in } I_1. \tag{15}$$

Osserviamo che valgono anche le proprietà:

$$I_1 \text{ contiene infiniti indici} \tag{16}$$

$$\forall n \in I_1 \quad x_n \in [a_1, b_1] \tag{17}$$

$$s(1) \in I_1 \tag{18}$$

$$s(1) > s(0). \tag{19}$$

Con la stessa strategia, partendo da $[a_k, b_k]$, I_k, $s(k)$ $(k \geq 1)$ costruiamo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$, I_{k+1}, $s(k+1)$. Sollecitato da *Soccorso Bovino* riporto i passaggi essenziali.

Prendiamo il punto medio $m_k = (a_k + b_k)/2$ e suddividiamo $[a_k, b_k]$ in due sottointervalli di uguale lunghezza $[a_k, m_k]$ e $[m_k, b_k]$. Osserviamo che almeno uno dei due sottointervalli $[a_k, m_k]$ e $[m_k, b_k]$ conterrà **le immagini** di infiniti indici diversi. Quindi

- *se* $[a_k, m_k]$ *contiene* **le immagini** *di infiniti indici diversi allora poniamo*

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [a_k, m_k]; \tag{20}$$

- *altrimenti poniamo*

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] := [m_k, b_k]. \tag{21}$$

Avendo scelto $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ scegliamo ora I_{k+1} e $s(k+1)$.

$$I_{k+1} := \{n > s(k) |\ x_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}]\} \tag{22}$$

$$s(k+1) := \text{ minimo indice contenuto in } I_{k+1}. \tag{23}$$

Osserviamo che, per come abbiamo fatto la costruzione, valgono le seguenti proprietà

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] \subset [a_k, b_k] \text{ e quindi } a_{k+1} \geq a_k \text{ e } b_{k+1} \leq b_k \tag{24}$$

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = ... = \frac{b - a}{2^k} \tag{25}$$

$$I_{k+1} \text{ contiene infiniti indici} \tag{26}$$

$$\forall n \in I_{k+1} \quad x_n \in [a_{k+1}, b_{k+1}] \tag{27}$$

$$s(k+1) \in I_{k+1} \tag{28}$$

$$s(k+1) > s(k). \tag{29}$$

Anche se non si vede ancora, siamo a pochi passi dalla meta. Finora non abbiamo utilizzato nessuno dei teoremi di analisi dimostrati in precedenza. Adesso usiamo un teorema semplice ma potente: il teorema della convergenza delle successioni monotone e limitate. Dalla (24) abbiamo che la successione a_k è non decrescente. Inoltre essa è limitata, poiché tutti i suoi elementi stanno in $[a, b]$. Analogamente la successione b_k è non crescente e limitata. Quindi convergono entrambe. Poniamo

$$\alpha := \lim_{k \to +\infty} a_k \qquad \beta := \lim_{k \to +\infty} b_k. \tag{30}$$

Ma passando al limite nella (25) abbiamo

$$\alpha - \beta = \lim_{k \to +\infty} (b_k - a_k) = 0 \tag{31}$$

da cui $\alpha = \beta$. Poniamo quindi

$$\ell := \alpha \equiv \beta. \tag{32}$$

Ora osserviamo che, per ogni k, abbiamo dalla (27) e dalla (28)

$$a_k \leq x_{s(k)} \leq b_k. \tag{33}$$

Grazie alle (30)-(33) possiamo applicare il teorema dei carabinieri, ottenendo

$$\lim_{k \to +\infty} x_{s(k)} = \ell \tag{34}$$

che termina la dimostrazione.

Domanda: perché ho riportato esplicitamente le proprietà (6), poi la (16) e infine la (26), che però non ho minimamente usato nella dimostrazione della (34)? C'è forse un punto che avrei dovuto precisare meglio, nel passaggio dal "caso k" al "caso $k + 1$"? Le mucche impallidiscono. Echeggiano muggiti si sconforto.