Definizione di integrale per funzioni continue

Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia $f \in C^0([a, b])$.
Per ogni intero positivo n costruiamo:

- I punti $x_0, .., x_n$ che suddividono $[a, b]$ in n parti uguali:

  $$x_k := a + k\,\frac{b-a}{n}, \qquad k = 0, 1, .., n.$$

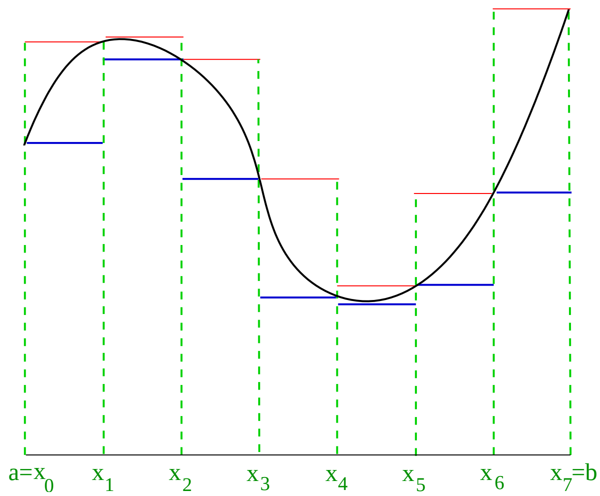
  Notiamo esplicitamente che $x_0 = a$, che $x_n = b$, e che $x_{k+1} - x_k = \dfrac{b-a}{n}$ per ogni $k = 0, .., n-1$.

- I valori massimi $M_1, .., M_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al punto precedente.

- I valori minimi $m_1, .., m_n$ che la f assume in ciascuno degli n subintervalli ottenuti al primo punto.

- Le somme

  $$S(n) := \sum_{r=1}^{n} M_r\,(x_r - x_{r-1}) \quad \text{e} \quad s(n) := \sum_{r=1}^{n} m_r\,(x_r - x_{r-1}).$$



Abbiamo ottenuto due applicazioni $n \to S(n)$ e $n \to s(n)$. Un teorema importante (la cui dimostrazione non è richiesta per l'orale di livello medio) garantisce che se $f \in C^0([a, b])$ allora le due successioni S e s **hanno lo stesso limite**:

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} s(n).$$

Tale limite viene detto **integrale di f su** $[a, b]$ e viene indicato con

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

In conclusione quindi, ripetendomi un po' (tanto per essere noioso come tutti si apettano che sia un matematico decente), abbiamo:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to+\infty} S(n) \equiv \lim_{n\to+\infty} s(n).$$

Definizione di integrale per funzioni continue a tratti

Supponiamo ora di avere una fuzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tale che: si possa suddividere [a,b] in un numero **finito** di subintervalli

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ .....[x_{n-1}, x_n],$$

con $a \equiv x_0 < x_1 < ... < x_n \equiv b$ in modo tale che per ogni subintervallo $[x_{k-1}, x_k]$ esista una funzone $f_k \in C^0([x_{k-1}, x_k])$ che coincide con f in $]x_{k-1}, x_k[$. Allora l'*integrale di f su $[a, b]$ sarà definito come*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nota la richiesta che *esista una funzone $f_k \in C^0([x_{k-1}, x_k])$ che coincide con f in $]x_{k-1}, x_k[$* **non può** essere sostituita dalla (più semplice) $f \in C^0(]x_{k-1}, x_k[)$ per ogni k.

Infatti, per un generico intervallo (c, d), le funzioni di $C^0(]c, d[)$ sono *molto più numerose* (e anche *più selvagge!*) delle funzioni che *coincidono su $]c, d[$ con una funzione di $C^0([c, d])$*.

Ad esempio, se $[c, d] \equiv [0, 1]$, la funzione $g(x)$ che vale 0 in 0 e $1/x$ in $]0, 1]$ risulta continua su $]0, 1[$, ma non coincide (su $]0, 1[$) con nessuna funzione di $C^0([0, 1])$.

Tornando al nostro caso, non volendo fare intervenire le f_k si potrebbe chiedere a f di essere continua su $]x_{k-1}, x_k[$ **e** di avere limite finito per x che tende a x_{k-1} e per x che tende a x_k. Che sarebbe *ugualmente brutto* :-(