

## Teoremi fondamentali del calcolo

In molti libri di testo compaiono **due** teoremi, denominati rispettivamente *Primo teorema fondamentale del calcolo* e *Secondo teorema fondamentale del calcolo*.

In altri libri di testo il contenuto di questi due teoremi viene condensato in un unico teorema, col nome di *Teorema fondamentale del calcolo*.

Qui seguiremo la prima strada.

### Primo teorema fondamentale del calcolo

**Enunciato** Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali, con  $a < b$ , e sia  $f \in C^0([a, b])$ . Osserviamo che per ogni  $x \in ]a, b]$  la funzione  $f$  risulta ovviamente continua su  $[a, x]$  e quindi integrabile su  $[a, x]$ . Possiamo quindi definire per ogni  $x \geq a$  la funzione

$$(1) \quad F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

(intendendo che  $F(a) = 0$ ). Allora (mucche: qui comincia la tesi!) per ogni  $x \in ]a, b[$  la funzione  $F$  risulta esserere *derivabile* e

$$(2) \quad F'(x) = f(x).$$

Inoltre  $F$  risulta essere derivabile a sinistra in  $b$  (con derivata uguale a  $f(b)$ ) e derivabile a destra in  $a$  (con derivata uguale a  $f(a)$ ).

**Dimostrazione** Ci limitiamo a far vedere che per ogni  $x < b$  la  $F$  risulta derivabile a destra in  $x$  e si ha

$$(3) \quad F'_+(x) = f(x).$$

La dimostrazione per le derivate sinistre (quando  $x > a$ ) sarà del tutto analoga. Nei punti  $x$  interni (cioè per  $x \in ]a, b[$ ) avremo quindi sia la derivata destra sia la derivata sinistra (entrambe uguali a  $f(x)$ ), e quindi varrà la (2). Quindi concentriamoci sulla dimostrazione della (3).

Ricordando la definizione di derivata destra, abbiamo

$$(4) \quad F'_+(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

ed usando la definizione di  $F$  (cioè la (1)) e la additività dell'integrale si ha

$$(5) \quad F'_+(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\int_x^{x+h} f(t) \, dt}{h}.$$

Usando il teorema della media per gli integrali di funzioni continue si ha poi

$$(6) \quad \int_x^{x+h} f(t) \, dt = hf(\xi)$$

dove  $\xi$  è un opportuno valore (*dipendente da  $x$  e da  $h$* ), con

$$(7) \quad x \leq \xi \leq x + h.$$

Sostituendo (6) in (5) si ha allora

$$(8) \quad F'_+(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0+} f(\xi)$$

Applicando nella (7) il teorema dei carabinieri, si ha che

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \xi = x.$$

A questo punto possiamo usare la continuità di  $f$  (qui basterebbe anche la continuità a destra!) e il lemma di commutazione nella (8), ottenendo

$$F'_+(x) \equiv \lim_{h \rightarrow 0+} f(\xi) = f(x),$$

che termina la dimostrazione della (3).

Prima di passare al secondo teorema fondamentale del calcolo, conviene introdurre al definizione di **primitiva di una funzione**.

**Definizione** Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali, con  $a < b$ , e siano  $f \in C^0([a, b])$  e  $P \in C^0([a, b])$ , Dico che  $P$  è una **primitiva di  $f$  su  $]a, b[$**  se  $P$  è derivabile in  $]a, b[$  e si ha

$$(9) \quad P'(x) = f(x) \quad \forall x \in ]a, b[$$

### Secondo teorema fondamentale del calcolo

**Enunciato** Siano  $a$  e  $b$  due numeri reali, con  $a < b$ , e sia  $f \in C^0([a, b])$ . Sia inoltre  $P$  una primitiva di  $f$  su  $]a, b[$ . Allora (osservato che sicuramente  $f$  è integrabile su  $]a, b[$ ) si ha:

$$(10) \quad \int_a^b f \, dx = P(b) - P(a)$$

**Dimostrazione** Come nel teorema precedente possiamo definire per ogni  $x \geq a$  la funzione

$$(11) \quad F(x) := \int_a^x f(t) \, dt$$

(intendendo ancora che  $F(a) = 0$ ). Ricordiamo che  $F$  risulta essere una funzione continua in  $[a, b]$  (continuità della funzione integrale) e derivabile in  $]a, b[$  (primo teorema fondamentale del calcolo). Consideriamo poi la funzione ausiliaria

$$(12) \quad D := P - F.$$

Osserviamo che anch'essa risulta continua in  $[a, b]$  (come differenza di funzioni continue) e derivabile in  $]a, b[$  (come differenza di funzioni derivabili). Dal primo teorema fondamentale del calcolo abbiamo che  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x$  di  $]a, b[$  e dalla definizione di primitiva abbiamo  $P'(x) = f(x)$  per ogni  $x$  di  $]a, b[$ . Quindi, facendo la differenza, abbiamo

$$D'(x) = P'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in ]a, b[$$

Applicando allora il teorema della derivata nulla otteniamo che  $D$  è costante, e in particolare

$$D(x) = D(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

In particolare avremo  $D(b) = D(a)$ . Ricordando la (12) e ricordando che  $F(a) = 0$  e

$$F(b) = \int_a^b f(t) \, dt$$

avremo allora

$$P(a) = D(a) = D(b) = P(b) - \int_a^b f(t) \, dt$$

Usando l'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine abbiamo allora

$$P(a) = P(b) - \int_a^b f(t) \, dt,$$

e la tesi (10) segue facilmente.