Secondo teorema fondamentale del calcolo in casi più generali

Funzioni continue a tratti e primitive generalizzate

Qui considereremo il secondo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più ge-ne-ra-li. Per la precisione abbandoneremo l'ipotesi che la funzione integranda f sia *continua* in tutto $[a, b]$, limitandoci a chiedere che f sia *continua a tratti su* $[a, b]$

Definizione Siano a e b due numeri reali, con $a < b$ e sia f una funzione da $[a, b]$ in $\mathbb{R}$. Diciamo che f è **continua a tratti** su $[a, b]$ se esistono un intero positivo n e una partizione

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n \equiv b \tag{1}$$

dell'intervallo $[a, b]$ in n parti tale che per ogni subintervallo $]x_{i-1}, x_i[$ $(i = 1, ..., n)$ si abbia che

- f è continua in $]x_{i-1}, x_i[$,
- esiste finito il $\lim\limits_{x \to x_{i-1}+}$,
- esiste finito il $\lim\limits_{x \to x_i-}$.

Osserviamo che ogni funzione f continua a tratti su $[a, b]$ risulterà anche limitata e integrabile su $[a, b]$. Per una funzione continua a tratti converrà poi introdurre il concetto di *primitiva generalizzata*.

Definizione Siano a e b due numeri reali, con $a < b$ ed f una funzione continua a tratti su $[a, b]$. Sia infine P una funzione continua su $[a, b]$. Diciamo che P 'e una **primitiva generalizzata** di f se esistono un intero positivo n e una partizione

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n \equiv b \tag{2}$$

di $[a, b]$ in n parti tali che P sia derivabile in $]x_{i-1}, x_i[$ per ogni $i = 1, ..., n$ e tale che

$$P'(x) = f(x) \qquad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad \forall i = 1, ..., n. \quad \square \tag{3}$$

Una mucca particolarmente audace mi fa notare che avrei dovuto introdurre la partizione (2) quando parlavo della f. O quanto meno dire che la (2) (cioè la partizione per la quale vale la (3)) è la stessa partizione (1) (per la quale f risulta continua in ogni subintervallo aperto). Brava! Ma per meritare un bel voto bisognerebbe anche riuscire a far vedere che, in assenza di queste precisazioni, le due partizioni potrebbero essere diverse... Oppure dimostrare che le due partizioni sono necessaria mente uguali, anche se non lo richiedo esplicitamente.... La mucca che ha parlato mi guarda con aria stupita. Le altre fanno finta di niente, temendo di essere interrogate. Qualche studente vuole intervenire? Nessuno? Che peccato! Vabbè, andiamo avanti.

Secondo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più generali

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia f una funzione continua a tratti su $[a, b]$, e sia P una primitiva generalizzata di f. Allora (mucche: questa è la tesi!) si ha

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = P(b) - P(a). \tag{4}$$

Dimostrazione Siano $n \in \mathbb{N}$ e

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n \equiv b$$

tali che in ogni sottointervallo aperto sia verificata la (3). Come nel teorema precedente possiamo definire per ogni $x \geq a$ la funzione

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(intendendo ancora che $F(a) = 0$). Ricordiamo che F risulta essere una funzione continua in $[a, b]$ (continuità della funzione integrale) e che verifica

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in]x_{i-1}, x_i[\;\; \forall i = 1, ..., n \tag{5}$$

(dal primo teorema fondamentale del calcolo in ipotesi più generali). Consideriamo poi la funzione ausiliaria

$$D := P - F. \tag{6}$$

Osserviamo che anch'essa risulta continua in $[a, b]$ (come differenza di funzioni continue) e derivabile in ogni $]x_{i-1}, x_i[\;\; \forall i = 1, ..., n$ (come differenza di funzioni derivabili). Inoltre da (6), (3) e (5) abbiamo che

$$D'(x) = P'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\;\; \forall i = 1, ..., n$$

Appicando allora il teorema della derivata nulla nella sua versione più generale otteniamo che D è costante in $[a, b]$. La dimostrazione procede quindi come nella versione semplificata, che qui riassumiamo: avremo

$$D(b) = D(a), \qquad F(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

che insieme a (6) danno

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - P(b) = 0 - P(a)$$

da cui la tesi (4) segue facilmente.