

Teorema della media per gli integrali

Considereremo dapprima il teorema per funzioni limitate e integrabili, non necessariamente continue. Poi vedremo che, nel caso in cui la funzione integranda sia continua, la tesi possa essere precisata.

Teorema della media per funzioni limitate e integrabili

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia f una funzione limitata e integrabile su $[a, b]$. Allora (mucche: questa è la tesi!) si ha

$$(1) \quad M_* \equiv \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \leq \sup_{x \in [a, b]} f(x) \equiv M^*. \quad \square$$

Prima della dimostrazione, facciamo qualche commento. Innanzi tutto, introduciamo la quantità

$$(2) \quad Q := \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

che spesso viene anche chiamata *media di f su $[a, b]$* . Si tratta di una quantità che interviene in moltissime applicazioni, e per questo merita una piccola discussione sul suo "significato fisico".

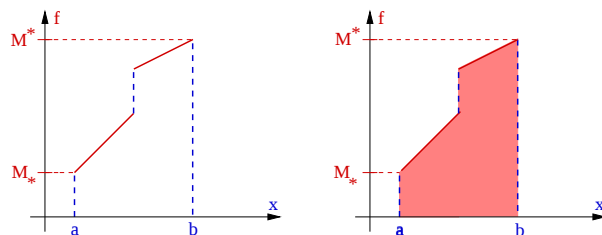


Figura 1

Nella Figura 1, il valore di Q (che ancora non compare) dovrà risultare dal quoziente tra l'area della regione rosa (uguale all'integrale della f su $[a, b]$) divisa per l'ampiezza dell'intervallo $[a, b]$. Immaginiamo di modificare la parte destra della Figura 1, mantenendo intatta la "quantità di materia" rosa, ma rendendo costante la funzione. Come succede in una zuccheriera quando, picchiettando sul bordo, facciamo assettare lo zucchero in modo che sia tutto alla stessa altezza (come farebbe un liquido).

Notiamo anche esplicitamente che, nelle applicazioni, la *dimensione fisica* di Q sarà la stessa della f . Osserviamo infine che l'enunciato del teorema può anche essere espresso dicendo che *la media di f su $[a, b]$ è sempre compresa tra l'estremo*

inferiore e l'estremo superiore di f su $[a, b]$. Una proprietà estremamente ragionevole. Le mucche assentono vigorosamente.

Nella Figura 2 finalmente appare la Q . Nella parte sinistra della figura, la quota Q è tale che le aree delle due regioni verdi siano uguali tra loro. Di conseguenza, nella parte destra, l'area della regione rosa uguaglia l'area del rettangolo avente base $[a, b]$ e altezza uguale a Q . Se la regione rosa fosse fatta di ghiaccio, e la sciogliessimo (impedendole di uscire lateralmente dalle "pareti" $x = a$ e $x = b$, e dimenticando il cabiamento di volume dell'acqua tra lo stato solido e quello liquido...), l'acqua ottenuta riempirebbe proprio il rettangolo di base $[a, b]$ e altezza Q .

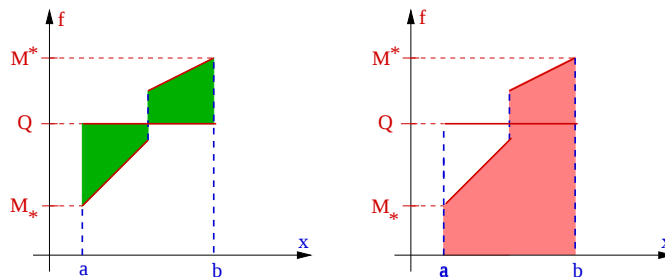


Figura 2

Dimostrazione Ricordiamo che l'ipotesi di limitatezza della f implica l'esistenza di due numeri reali M_1 e M_2 tali che

$$(3) \quad M_1 \leq f(x) \leq M_2 \quad \forall x \in [a, b]$$

Questo (unito all'*assioma dell'estremo superiore*) implica a sua volta l'esistenza del massimo tra i minoranti della immagine di f (cioè $\inf_{x \in [a, b]} f(x)$, che qui abbiamo chiamato M_*) e del minimo tra i maggioranti della immagine di f (cioè $\sup_{x \in [a, b]} f(x)$, che qui abbiamo chiamato M^*). In particolare avremo

$$(4) \quad M_* \leq f(x) \leq M^* \quad \forall x \in [a, b].$$

In altre parole (molto più ruspanti) possiamo dire che M_* e M^* sono, rispettivamente, il *miglior valore di* M_1 e il *miglior valore di* M_2 che rendono vera la (3). Integrando la (4) su $[a, b]$ e ricordando che il primo e il terzo termine sono *costanti* su $[a, b]$, avremo allora

$$M_*(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M^*(b-a),$$

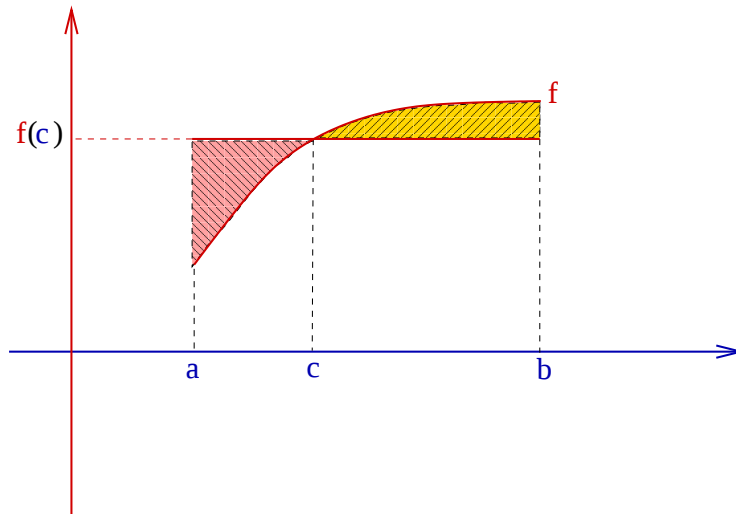
e dividendo tutto per $b-a$ (che è maggiore di zero) si ottiene la tesi (1). $\square$

Possiamo ora passare al caso delle funzioni continue.

Teorema della media per funzioni continue

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia f una funzione continua su $[a, b]$. Allora (mucche: questa è la tesi!) esiste un $c \in [a, b]$ tale che

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}. \quad \square$$



Dimostrazione In pratica, questo è un corollario del teorema precedente. Infatti il teorema precedente ci garantisce che la media Q di f su $[a, b]$ è un numero compreso tra M_* e M^* che, essendo ora la f continua su $[a, b]$, risultano essere rispettivamente il valore **minimo** e il valore **massimo** che la f assume su $[a, b]$ (teorema dei massimi e minimi per funzioni di $C^0([a, b])$). Ma il teorema dei valori intermedi (sempre per funzioni di $C^0([a, b])$) ci garantisce che ogni valore compreso tra il minimo e il massimo appartiene anch'esso all'immagine della funzione. Quindi Q appartiene all'immagine, cioè esiste un $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = Q$. Ricordando la (2), questo conclude la dimostrazione. $\square$