

Teorema della derivata nulla

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$, e sia f una funzione continua su $[a, b]$, derivabile su $]a, b[$, e tale che

$$(1) \quad f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$$

Allora (mucche: questa è la tesi!) f è costante in $[a, b]$. $\square$

Dimostrazione. Per dimostrare il teorema faremo vedere che, nelle ipotesi fatte, si ha

$$(2) \quad f(x) = f(a) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Per ogni $x \in]a, b[$ applichiamo il Teorema di Lagrange (detto anche *Teorema del valor medio* o, in alcuni testi, *Teorema del valor medio per le derivate*) sull'intervallo $[a, x]$. Osserviamo che per ogni x la funzione f soddisfa le ipotesi del teorema, che quindi ci dice che esisterà un $c \in]a, x[$ tale che

$$(3) \quad f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Usando (1) in (3) si ottiene immediatamente (2)

Osserviamo che la tesi del teorema può essere dimostrata in ipotesi più generali. Per esempio abbiamo il seguente risultato.

Enunciato Siano a e b due numeri reali, con $a < b$. Sia n un intero positivo, e sia

$$a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$$

una partizione dell'intervallo $[a, b]$ in n parti. Sia infine f una funzione continua su $[a, b]$, derivabile in $]x_{i-1}, x_i[$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e tale che

$$f'(x) = 0 \quad \forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad \forall i = 1, \dots, n$$

Allora (mucche: questa è la tesi!) f è costante in $[a, b]$. $\square$

Dimostrazione. Applicando il risultato precedente su ogni subintervallo $]x_{i-1}, x_i[$ otteniamo che f è costante su ogni subintervallo. La continuità di f su tutto $[a, b]$ implica allora che tutte queste costanti devono coincidere tra loro. Quindi abbiamo un'unica costante e la tesi è dimostrata.