Teorema di Rolle

Enunciato

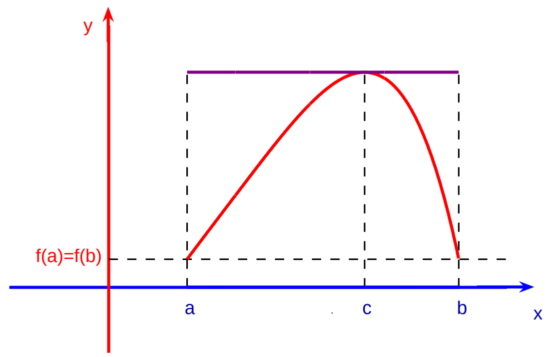
Ipotesi Sia $[a,b]$ un intervallo chiuso e sia $f : [a,b] \to I\!R$ tale che

- (i) $f \in C^0([a,b]$,
- (ii) f è derivabile in $]a,b[$,
- (iii) $f(a) = f(b)$.

Allora:

Tesi Esiste *almeno un* $c \in [a,b]$ tale che

$$f'(c) = 0. \tag{1}$$



Dimostrazione Dalla (i) e dal teorema della esistenza dei massimi e minimi, ottenimo che devono esistere due punti x_m e x_M, entrambi in $[a,b]$, tali che

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall x \in [a,b]. \tag{2}$$

A questo punto si danno, ovviamente, *due* casi

- I - Almeno uno, tra x_m e x_M, sta in $]a,b[$ (cioè è *interno* all'intervallo $[a,b]$).

- II - Entrambi x_m e x_M sono negli estremi.

La seconda ipotesi, a priori, darebbe luogo a quattro sottocasi: $\{x_m = x_M = a\}$, oppure $\{x_m = x_M = b\}$, oppure $\{x_m = a,\ x_M = b\}$, oppure $\{x_m = b,\ x_M = a\}$. Ma, tenuto conto della (iii), in tutti e quattro i casi avremmo sempre $f(x_m) = f(x_M)$, e quindi, dalla (2) $f(x) \equiv f(x_m) \equiv f(x_M)$. Insomma: se si verifica il caso II, la funzione f risulta essere costante, e quindi la sua derivata è nulla in tutto $]a,b[$, e quindi qualunque punto di $]a,b[$ può essere preso come "punto c".

Consideriamo ora il caso I, e supponiamo, per fissare le idee, che sia x_M a essere in $]a,b[$. Avremmo allora *un massimo relativo interno*. È facile vedere che tutte le altre ipotesi del Teorema di Fermat sono verificate, e quindi lo possiamo applicare. La tesi del Teorema di Fermat ci dice allora che $f'(x_M) = 0$. Quindi la (1) risulta verificata prendendo $c = x_M$.