

Teorema di Lagrange

Enunciato

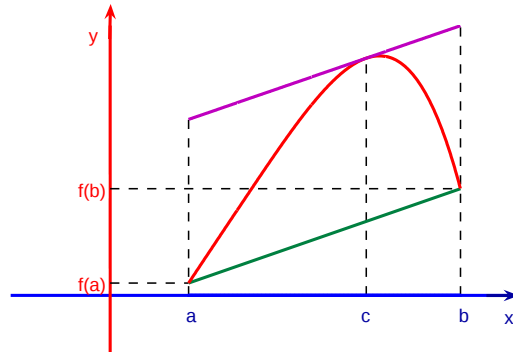
Ipotesi Sia $[a, b]$ un intervallo chiuso e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

- (i) $f \in C^0([a, b])$,
- (ii) f è derivabile in $]a, b[$,

Allora:

Tesi Esiste almeno un $c \in [a, b]$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (1)$$



Dimostrazione Costruiamo dapprima la funzione ausiliaria $r(x)$, dove $y = r(x)$ è l'equazione della retta congiungente i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Come vedremo, non servirà avere l'espressione esplicita della $r(x)$. Ci basterà sapere il valore della sua derivata, che è costante e che, senza fare i conti, deve essere

$$r'(x) \equiv \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

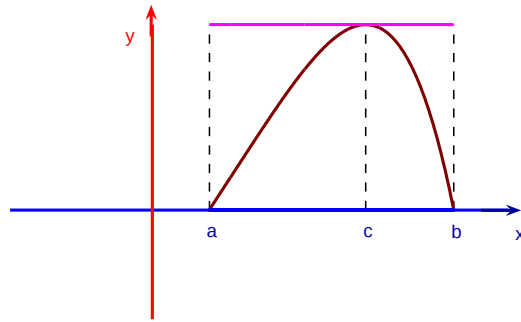
Muggiti perplessi. Mucche: ho una retta che, per uno spostamento nelle x di $b - a$ compie uno spostamento nelle y di $f(b) - f(a)$. La sua pendenza $(f(b) - f(a))/(b - a)$ sarà uguale alla sua derivata. Muggiti insoddisfatti. Va bene, va bene: l'equazione della retta (passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$) sarà

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}.$$

da cui

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Le mucche sembrano convinte... Possiamo ricominciare. Consideriamo allora la funzione $d(x)$ che esprime la differenza tra la f e la r .



Notiamo che (sempre senza fare

i conti), siccome la f e la r hanno lo stesso valore in a , la loro differenza, in a , sarà nulla. E siccome hanno lo stesso valore anche in b , la loro differenza sarà nulla anche in b . Inoltre la $r(x)$ è continua e derivabile ovunque (è un polinomio di primo grado!). Quindi la differenza avrà le stesse proprietà di continuità e di derivabilità che aveva la f . Dalle (i) e (ii) avremo quindi

- (i) $d \in C^0([a, b])$,
- (ii) d è derivabile in $]a, b[$,

che unite alla

- (iii) $d(a) = d(b) (= 0)$

ci dicono che alla funzione d possiamo applicare il Teorema di Rolle. Il quale ci assicura l'esistenza di almeno un c tale che $d'(c) = 0$. Ricordiamo allora l'espressione di $d = f - r$. Calcolando la derivata in c

$$0 = d'(c) = f'(c) - r'(c)$$

che ricordando la (2) fornisce

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

cioè la tesi.