

Teorema di Fermat

Enunciato

Ipotesi Sia (a, b) un intervallo, sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e sia

$$x_0 \in]a, b[\quad (1)$$

un punto di estremo relativo per f . Supponiamo che

$$f \text{ sia derivabile in } x_0. \quad (2)$$

Allora

Tesi

$$f'(x_0) = 0. \quad (3)$$

Dimostrazione Supponiamo, per fissare le idee, che x_0 sia un punto di **minimo relativo**. Ricordiamo che x_0 è un punto di massimo relativo per f se esistono a^* e b^* tali che

$$a \leq a^* < x_0 < b^* \leq b \quad (4)$$

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in [a^*, b^*]. \quad (5)$$

Per dimostrare la (3) facciamo vedere che si deve avere *contemporaneamente*

$$f'(x_0) \geq 0. \quad (6)$$

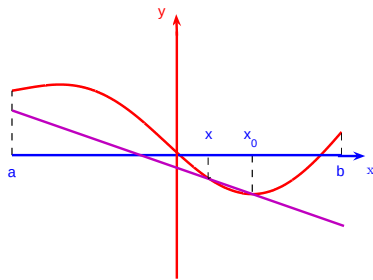
e

$$f'(x_0) \leq 0. \quad (7)$$

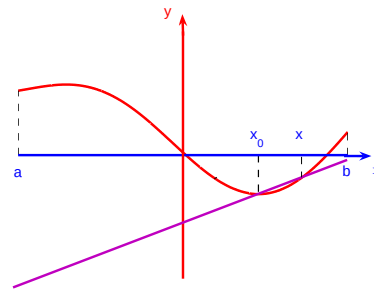
Per questo consideriamo per $x \neq x_0$ il rapporto incrementale

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (8)$$

Notiamo che $R(x)$ rappresenta la pendenza della retta congiungente i punti $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$ (v. figura).



Il caso $x < x_0$



Il caso $x > x_0$

Sappiamo che $f'(x_0)$ è il limite di $R(x)$ per x che tende a x_0 , e che tale limite esiste, grazie alla (2). In particolare esisteranno *il limite sinistro* ed *il limite destro* (stiamo usando la (1)), e saranno uguali:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} R(x) = f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} R(x). \quad (9)$$

Esaminiamo dapprima il *limite sinistro*: per $x < x_0$ avremo che il denominatore di $R(x)$ in (8) sarà < 0 , ed il numeratore, dalla (5), sarà ≥ 0 per $a* \leq x < x_0$: quindi avremo

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\geq 0}{< 0} \leq 0 \quad \forall x \in [a*, x_0[.$$

Per il *teorema della permanenza del segno* avremo quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} R(x) \leq 0,$$

e quindi (usando la prima delle (9)) otteniamo la (6).

Possiamo ora fare un ragionamento analogo per il *limite destro*: per $x_0 < x$ avremo che il denominatore di $R(x)$ in (8) sarà > 0 , ed il numeratore, dalla (5), sarà ancora ≥ 0 per $x_0 < x \leq b*$. Quindi avremo

$$R(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\geq 0}{> 0} \geq 0 \quad \forall x \in [x_0, b* [$$

Per il *teorema della permanenza del segno* avremo quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} R(x) \geq 0$$

quindi (usando la seconda delle (9)) otteniamo la (7). Come abbiamo già osservato, dalla (6) e dalla (7) segue poi, immediatamente, la tesi (3).