Continuità delle funzioni derivabili

Teorema Sia: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che f sia derivabile in x_0. Allora (tesi): f è continua in x_0.
Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{1}$$

che riscriviamo come

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0. \tag{2}$$

Osservando che nel fare il limite per $x \to x_0$ non si usa mai (e non si deve usare) il valore $x = x_0$, possiamo scrivere

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \tag{3}$$

che inserito nella (2) fornisce

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0). \tag{4}$$

Nel secondo membro della (4) abbiamo ora il limite per $x \to x_0$ di un prodotto: dalla ipotesi di derivabilità di f in x_0 si ha che il primo fattore, per $x \to x_0$, tende a un limite finito (e precisamente a $f'(x_0)$) mentre il secondo fattore, sempre per $x \to x_0$, tende ovviamente a 0. Il prodotto tenderà allora al prodotto dei limiti:

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0. \tag{5}$$

e la (2) (e quindi anche la (1)) è dimostrata. $\square$

Naturalmente si possono ottenere, con dimostrazioni sostanzialmente identiche, altri risultati di questo tipo. Ad esempio, supponendo che la f sia definita solo su un intervallo $]a, b[$ e supponendo che $x_0 \in]a, b[$. Oppure, supponendo solo che f sia derivabile a destra (oppure a sinistra) in x_0, potremmo dedurre la continuità a destra (oppure, rispettivamente, a sinistra). E così via. Il lettore accorto saprà sicuramente ricostruire da solo una qualunque di queste varianti.

Muggiti di disapprovazione.