

# Corso di Laurea in Fisica, a.a. 1999/2000

## Istruzioni per l'esame di Analisi 2

### Modalità dell'esame

L'esame consiste di una prova scritta e di un colloquio orale. Scopo dello scritto è verificare la conoscenza del programma e la capacità dello studente di applicare la teoria imparata per risolvere semplici esercizi.

La votazione dello scritto è in trentesimi. È sconsigliato dalla partecipazione alla prova orale lo studente che ottiene meno di 15/30.

Scopo del colloquio orale è valutare la conoscenza degli argomenti oggetto del programma e le capacità logico-deduttive dello studente. È richiesta la conoscenza degli enunciati principali degli argomenti presenti nel programma e delle dimostrazioni dei teoremi indicati con un asterisco. È inoltre auspicabile la capacità di sviluppare semplici ragionamenti sui teoremi studiati, valutando di volta in volta l'importanza delle varie ipotesi con esempi e contresempi.

Lo studente può integrare a piacere la lista dei teoremi di cui è richiesta la dimostrazione.

### Programma del corso

**1. Serie di Fourier.** *Coefficienti della serie di Fourier (\*)*. Convergenza puntuale della serie di Fourier. *Disuguaglianza di Bessel (\*)*. Convergenza uniforme della serie di Fourier. Integrabilità della serie di Fourier.

**2. Spazi metrici e spazi normati.** Spazi metrici. Successioni. Spazi normati. Spazi di Banach. Funzioni continue e Lipschitziane. *Teorema delle contrazioni (\*)*. Insiemi compatti. *Teorema di Weierstraß (\*)*. Teorema di Cantor–Heine. Insiemi connessi. Teorema di Ascoli–Arzelà.

**3. Funzioni di più variabili reali.** Continuità. Derivabilità. Differenziale. *Teorema del differenziale (\*)*. Funzioni composte. Derivate direzionali. *Funzioni a gradiente nullo in un aperto connesso (\*)*. Teorema di Lagrange. Polinomi di Taylor. Regolarità di funzioni definite mediante un integrale. *Massimi e minimi relativi, condizione necessaria e condizioni sufficienti (\*)*. Principio di massimo per funzioni armoniche. Funzioni a valori vettoriali.

**4. Equazioni differenziali ordinarie.** Problema di Cauchy. *Teorema di esistenza e unicità locale (\*)*. Prolungamento delle soluzioni. Esistenza del prolungamento massimale.

Esistenza in grande. Condizione sufficiente per la Lipschitzianità della  $f$ . Regolarità della soluzione. Sistemi di equazioni differenziali lineari. *Equazioni lineari del primo ordine (\*)*. Il Wronskiano. Studio qualitativo.

**5. Curve in  $\mathbf{R}^n$ .** Curve regolari. Lunghezza di una curva. Integrale curvilineo. Curve in  $\mathbf{R}^2$  e  $\mathbf{R}^3$ .

**6. Misura e integrazione.** Misura di Peano–Jordan. Misura di Lebesgue. Integrale di Riemann. Funzioni misurabili secondo Lebesgue. Funzioni semplici. L'integrale di Lebesgue. Teorema della convergenza monotona. Lemma di Fatou. *Teorema della convergenza dominata (\*)*. Calcolo di misure. Teorema delle sezioni misurabili. Teorema di Fubini. Cambiamento di variabili negli integrali multipli.

**7. Superfici in  $\mathbf{R}^3$ .** Superfici regolari. Area di superfici. Teorema di Stokes. Teorema della divergenza.

**8. Forme differenziali lineari.** Forme differenziali di ordine  $n$ . Forme differenziali esatte. *Teorema di caratterizzazione delle forme esatte (\*)*. Forme chiuse. *Forme chiuse su aperti stellati di  $\mathbf{R}^n$  (\*)*. *Formule di Gauss-Green (in insiemi normali) (\*)*. Forme differenziali su aperti semplicemente connessi.

**9. Funzioni implicite e teorema dei moltiplicatori di Lagrange.** *Teorema di Dini (\*)*. Funzioni invertibili. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Totale teoremi con dimostrazione: **14**.