6. Tecnica di partizione del dominio

In questo paragrafo presentiamo una tecnica per certi aspetti collegata al metodo dei macroelementi. Tale tecnica può essere trovata in [21].

L'idea è quella di decomporre il dominio Ω nell'unione disgiunta di sottodomini e di verificare la condizione inf-sup su ciascuno dei singoli sottodomini. È chiaro che il secondo problema. a priori non meno problematico di quello di partenza, può avere un certo interesse se, per esempio, la forma dei sottodomini è particolarmente semplice.

Teorema 6.1. *Decomponiamo Ω in un numero finito di sottodomini disgiunti, di frontiera lipschitziana*

$$\Omega = \bigcup_{r=1}^{R} \Omega_r.$$

Siano V_h e Q_h due successioni di spazi di dimensione finita che approssimino dall'interno rispettivamente $\left(H_0^1\right)^2$ e L_0^2. Si considerino i seguenti spazi:

$$V_{0,r} = \{v \in V_h : v = 0 \ \textit{in} \ \Omega \setminus \Omega_r\},$$

$$Q_r = \{q_{|\Omega_r} : q \in Q_h\},$$

$$Q_{0,r} = Q_r \cap L_0^2(\Omega_r),$$

$$K = \{q \in L_0^2(\Omega) : q_{|\Omega_r} \ \text{è} \ \textit{costante}, \ 1 \leq r \leq R\}.$$

Supponiamo inoltre che fra gli spazi $V_{0,r}$ e $Q_{0,r}$ valga la condizione inf-sup

$$\exists \beta_0 > 0 \ \textit{t.c.} \ \forall h > 0 \qquad \inf_{q_h \in Q_{0,r}} \sup_{\underline{v}_h \in V_{0,r}} \frac{\int_\Omega q_h \operatorname{div} \underline{v}_h \, d\underline{x}}{||q_h||_{0/\mathbb{R}} ||\underline{v}_h||_1} \geq \beta_0 \tag{6.1}$$

e che analogamente valga la condizione inf-sup fra gli spazi V_h e K, dove tutte le costanti sono indipendenti da h e da r. Allora esiste β indipendente da h tale che valga la condizione inf-sup

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\underline{v}_h \in V_h} \frac{\int_\Omega q_h \operatorname{div} \underline{v}_h \, d\underline{x}}{||q_h||_{0/\mathbb{R}} ||\underline{v}_h||_1} \geq \beta.$$

Dim. Osserviamo innanzitutto che vale la decomposizione ortogonale

$$Q_r = Q_{0,r} \oplus \mathbb{R}.$$

Allora decomponiamo $q_h \in Q_h$ nel seguente modo:

$$q_h = \widetilde{q} + \overline{q},$$

con

$$\overline{q}_{|\Omega_r} = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} q_h \, d\underline{x}$$

e

$$\widetilde{q}_r = \widetilde{q}_{|\Omega_r} \in Q_{0,r}.$$

Si ha evidentemente $\overline{q} \in K$ e

$$||q_h||^2_{0,\Omega} = ||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega} + ||\overline{q}||^2_{0,\Omega}. \tag{6.2}$$

Grazie all'ipotesi (III–6.1), esiste $\widetilde{v}_r \in V_{0,r}$ tale che

$$\int_{\Omega_r} \widetilde{q}_r \operatorname{div} \widetilde{v}_r \, d\underline{x} = ||\widetilde{q}_r||^2_{0,\Omega_r},$$
$$||\widetilde{v}_r||_{1,\Omega_r} \leq \frac{1}{\beta_0} ||\widetilde{q}_r||_{0,\Omega_r}.$$

Analogamente, grazie al fatto che la coppia (V_h, K) verifica la condizione inf-sup, esiste una funzione $\overline{v} \in V_h$ tale che

$$\int_{\Omega_r} \overline{q}_r \operatorname{div} \overline{v} \, d\underline{x} = ||\overline{q}_r||^2_{0,\Omega_r},$$
$$||\overline{v}||_{1,\Omega_r} \leq \frac{1}{\beta_K} ||\overline{q}_r||_{0,\Omega_r}.$$

Sia ora $\widetilde{v}$ la funzione di V_h verificante $\widetilde{v}_{|\Omega_r} = \widetilde{v}_r$ per ogni r. Vogliamo ora associare a q_h la funzione v_h di V_h definita nel seguente modo:

$$v_h = \widetilde{v} + \alpha \overline{v},$$

dove α è una costante positiva da fissare in modo che la coppia (v_h, q_h) sia stabile.

Si osservano facilmente le seguenti identità

$$\int_\Omega \overline{q}\,\mathrm{div}\,\widetilde{v}\,d\underline{x} = 0,$$
$$\int_\Omega \widetilde{q}\,\mathrm{div}\,\widetilde{v}\,d\underline{x} = ||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega},$$
$$\int_\Omega \overline{q}\,\mathrm{div}\,\overline{v}\,d\underline{x} = ||\overline{q}||^2_{0,\Omega}.$$

Si ha inoltre

$$\int_\Omega \widetilde{q}\,\mathrm{div}\,\overline{v}\,d\underline{x} = \frac{\sqrt{N}}{\beta_K}||\widetilde{q}||_{0,\Omega}||\overline{q}||_{0,\Omega},$$

dove N è la dimensione dello spazio in cui è immerso Ω.

Questi ultimi risultati, portano alla stima

$$\int_\Omega q_h\,\mathrm{div}\,v_h\,d\underline{x} = ||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega} + \alpha||\overline{q}||^2_{0,\Omega} - \alpha\frac{\sqrt{N}}{\beta_K}||\widetilde{q}||_{0,\Omega}||\overline{q}||_{0,\Omega}.$$

Consideriamo allora la seguente disuguaglianza

$$||\widetilde{q}||_{0,\Omega}||\overline{q}||_{0,\Omega} \le \varepsilon||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega} + \frac{1}{4\varepsilon}||\overline{q}||^2_{0,\Omega},$$

da cui discende

$$\int_\Omega q_h\,\mathrm{div}\,v_h\,d\underline{x} \ge \left(1 - \frac{\alpha\varepsilon\sqrt{N}}{\beta_K}\right)||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega} + \left(1 - \frac{\sqrt{N}}{4\varepsilon\beta_K}\right)||\overline{q}||^2_{0,\Omega},$$

con $\varepsilon > 0$ arbitrario. La scelta

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{\beta_K}{2\alpha\sqrt{N}}$$

produce la disuguaglianza

$$\int_\Omega q_h\,\mathrm{div}\,v_h\,d\underline{x} \ge \frac{1}{2}||\widetilde{q}||^2_{0,\Omega} + \alpha\left(1 - \frac{\alpha N}{2\beta_K^2}\right)||\overline{q}||^2_{0,\Omega}.$$

Scegliamo infine la costante α nel seguente modo

$$\alpha = \frac{\beta_K^2}{N}.$$

Da (III–6.2) discende quindi

$$\int_\Omega q_h \operatorname{div} v_h \, d\underline{x} \geq \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2}\right) ||q_h||^2_{0,\Omega}. \tag{6.3}$$

Si ha infine

$$\begin{aligned} ||v_h||_{1,\Omega} &\leq ||\widetilde{v}||_{1,\Omega} + \alpha||\overline{v}||_{1,\Omega} \leq \\ &\frac{1}{\beta_0}||\widetilde{q}||_{0,\Omega} + \frac{\alpha}{\beta_K}||\overline{q}||_{0,\Omega}. \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mettiamo insieme ora le equazioni (III–6.3) e (III–6.4), ottenendo la stima finale

$$\frac{\int_\Omega q_h \operatorname{div} \underline{v}_h \, d\underline{x}}{||\underline{v}_h||_1} \geq \beta,$$

dove β dipende solo da N, β_K e β_0. $\square$