

1. Si consideri la successione di funzioni

$$f_k(x) = \frac{x^2}{k + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare il limite puntuale di $\{f_k\}$ per $k \rightarrow \infty$ e studiare la convergenza uniforme per $x \in \mathbb{R}$ e per $x \in [a, b]$ con $a < b$ numeri reali.

2. Dire se la forma differenziale

$$\omega(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2}$$

è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$.

3. Determinare, al variare di $a \in [0, 1]$, il valore massimo assoluto assunto dalla funzione $f_a(x, y) := ax^2 + y^2$ sull'insieme

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **misurabile** e **non negativa** e si definisca $f_n(x) := (f(x) - n)^+$, (ove $(\cdot)^+$ è la parte positiva).

(a) Dimostrare che, se f è **sommabile**, allora vale la proprietà

$$(P) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 0$$

(ove l'integrale si intende nel senso di Lebesgue).

(b) Dire se $(P) \implies f$ sommabile.

(c – **facoltativo**) Dire se $(P) \implies f$ localmente sommabile (ossia sommabile su ogni intervallo chiuso e limitato).

(d – **facoltativo**) Dire se f localmente sommabile $\implies (P)$.