

1. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

utilizzando lo sviluppo in serie della funzione  $f(x) = x^2$  prolungata per periodicità a tutto  $\mathbb{R}$  a partire dall'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

2. Si consideri la funzione

$$f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad f(x) = \frac{\arctan(2x) \sin x}{x^{5/2}}$$

e si ponga

$$a_n := \int_{1/n}^n f(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Si risponda alle seguenti domande giustificando le proprie risposte:

- (a) Dire se esiste il  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  e in caso affermativo se è finito o infinito.
- (b) Dire se  $f$  è integrabile secondo Lebesgue su  $(0, +\infty)$  e se

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$