

Scritto d'esame — 19 febbraio 2004

1. Sia data la forma differenziale ω_a definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dall'espressione

$$\omega_a(x, y) = \frac{x - y}{(x^2 + y^2)^{2a-1}} dx + \frac{x + y}{(x^2 + y^2)^{2a-1}} dy.$$

Valutare l'esattezza della forma al variare di $a \in \mathbb{R}$.

2. Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = |x|$ prolungata per periodicità, si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

3. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, sia data la funzione $F_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F_a(x, y) := x^2 + xe^y - e^{2y} - a.$$

Si ponga $C_a := Z(F_a) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F_a(x, y) = 0\}$. Dire per quali valori di a l'insieme C_a è localmente rappresentabile, nell'intorno di ogni suo punto, come grafico di una funzione $y = y(x)$. Quando ciò non avviene, determinare esplicitamente i punti di C_a nel cui intorno C_a non è localmente rappresentabile come grafico di una funzione $y = y(x)$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **sommabile** e nulla al di fuori di $[0, 1)$. Si ponga, per $\alpha > 0$ e $x \in [0, +\infty)$,

$$g_\alpha(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x-n)}{(n+1)^\alpha}.$$

- (a) Dimostrare che g_α è sommabile su $[0, +\infty)$ per ogni $\alpha > 1$.
- (b) Determinare la classe delle funzioni f per cui g_1 è sommabile su $[0, +\infty)$.
- (c) Determinare la classe delle funzioni f limitate per cui g_1 è integrabile in senso improprio su $[0, +\infty)$.