

Scritto d'esame — 14 settembre 2004

1. Studiare la successione di funzioni

$$f_n = \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$$

nell'intervallo $[0, 1]$. Indicare un intervallo reale in cui ci sia convergenza uniforme.

2. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = y(1 - y)e^{-x^2} dx + e^{-y^2} dy$$

sul quadrato di vertici i punti $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ percorso una volta in senso antiorario.

3. Determinare per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + 1 - \cos y - z = c^2 \\ x^3 + y^2 + z + z^2 = c^3 \end{cases}$$

descrive sicuramente, nell'intorno del punto $P = (c, 0, 0)$, una curva regolare.

4. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{ne^{-nx}}{n+1-nx} dx, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{1+1/n} \frac{ne^{-nx}}{n+1-nx} dx.$$