

Scritto d'esame — 12 novembre 2004

1. Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq 0, \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

prolungata per periodicità e discuterne la convergenza.

2. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = e^{-x^2} dx + (1 - x^2)e^{-y^2} dy$$

sul quadrato di vertici i punti $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ percorso una volta in senso antiorario.

3. Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione misurabile, non negativa e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Dire se le seguenti affermazioni sono sempre vere o possono essere false.

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} f(x) dx = 0,$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = 0,$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{n^2}^{(n+1)^2} f(x) dx = 0.$

4. Dati l'insieme

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 e^y - xy = 0\}$$

e la funzione $f(x, y) := -xe^y - y^2$, calcolare $\sup_A f$ e $\inf_A f$.