

ANALISI 2 — Tema d'esame del 7 aprile 2003

APPELLO STRAORDINARIO

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti.

1. Data la forma differenziale definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ da

$$\omega(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

calcolare l'integrale di ω esteso alla curva γ descritta dai punti $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$ e percorsa per un giro in senso antiorario.

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^4) - x^2}{x^2 + y^3} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare la differenziabilità di f in $(0, 0)$.

3. Risolvere la seguente equazione differenziale ordinaria del secondo ordine

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

4. Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi/2, \pi/2], \\ -1, & x \in [-\pi, -\pi/2[\cup]\pi/2, \pi], \end{cases}$$

prolungata per periodicità a tutto \mathbb{R} , determinare la somma della serie di Fourier associata a g nel punto $x = \pi/2$.

5. Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$F(x, y) = \frac{2x^2 + 2y^2}{x^2 + y^2/2}$$

sul bordo del triangolo di vertici $(1, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$.