

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 6 luglio 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** quali sono i quattro esercizi svolti.

1. La posizione  $y$  di un pendolo soddisfa l'equazione differenziale

$$y'' + \alpha y' + 4y = 0.$$

Dimostrare che esiste  $\alpha$  tale che il pendolo passa infinite volte per  $y = 0$  indipendentemente dalla posizione iniziale.

2. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \cos x \sin y$$

sugli insiemi  $K = [0, \pi] \times [0, \pi]$  e  $\partial K$ .

3. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y \, dx - x \, dy}{x^2 + y^2}$$

lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -4/(1 + 3t^6) \end{cases}$$

con  $t \in [-1, 1]$  orientata nel verso delle  $x$  crescenti.

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_T (xy + x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

dove  $T = T_1 \cup T_2$  con

$T_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \leq 0\}$  e

$T_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ .

**5.** Dare, quando possibile, per ciascuna delle seguenti affermazioni un esempio di funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , *continua* in  $(0, 0)$ , che le soddisfi.

- a) Per qualunque direzione  $\nu$ , non esiste  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ ;
- b) esiste il piano tangente in  $(0, 0)$ , ma non esiste  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$ , dove  $\nu$  è la direzione parallela alla bisettrice del primo quadrante;
- c) esiste  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ , ma non esiste  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$  per qualunque altra direzione  $\nu$ .