

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 29 settembre 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Studiare la continuità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate parziali ( $\partial/\partial x$  e  $\partial/\partial y$ ) per la funzione  $f$ :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 \sin(y)(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2. Si consideri la soluzione  $y = y(x)$  della equazione differenziale

$$x^2 + 2yx + y^2 - 2x^2y' = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

il cui grafico rimane tangente alla retta di equazione cartesiana  $y + 1 = 0$ . Si descriva qualitativamente il comportamento di tale soluzione nell'intorno del punto di tangenza e successivamente si calcoli l'espressione analitica della soluzione medesima (può essere utile la sostituzione  $z = y/x$ ).

3. Si consideri l'insieme

$$T = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0, \ x^2 + y^2 - 2y \geq 0, \ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T xy \, dx \, dy.$$

4. Dato il dominio  $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$ , si calcoli il flusso uscente da  $D$  del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y - x, z + y, 6x^4y^2)$$

5. Posto  $f(x) = \pi^2 - x^2$ ,  $0 < x < \pi$ , trovare una serie di soli coseni che converge a  $f$  in  $]0, \pi[$ . Studiare il tipo di convergenza e dedurre la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$