

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 28 settembre 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** quali sono i quattro esercizi svolti.

1. Siano  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $A, B$  due sottoinsiemi limitati di  $X$ . Discutere le seguenti affermazioni.

- $\text{diam}(A \cup B) = \max \{ \text{diam } A, \text{diam } B \}$
- $\text{diam}(A \cup B) \in ] \min \{ \text{diam } A, \text{diam } B \}, \max \{ \text{diam } A, \text{diam } B \} [$
- $\text{diam}(A \cup B) \geq \min \{ \text{diam } A, \text{diam } B \}$ .

2. Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = y^2$$

sull'insieme

$$C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \}.$$

3. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = (2e^y - ye^x) dx + (2xe^y - e^x) dy$$

lungo la curva di equazione

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t^4 - t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

4. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = 2^{1+x} + 3^y + 4x - 3(\ln 3)y.$$

Dire se in un intorno di  $(0, 1)$  l'equazione

$$f(x, y) = 5 - 3 \ln 3$$

definisce implicitamente una funzione ( $y = \varphi(x)$  oppure  $x = \psi(y)$ ) concava o convessa.

5. Studiare la regolarità al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} |xy|^{3\alpha+2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$