

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 26 maggio 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti.

**1.** Si consideri sull'intervallo  $[0, \pi]$  la funzione  $f(x) = e^x$ , estesa poi a  $[-\pi, \pi]$  in modo pari, ed infine a tutto  $\mathbb{R}$  per periodicità. Si calcolino i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier e si calcoli, giustificando i passaggi, la somma della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + 4k^2}.$$

**2.** Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{2y}{1 + x^2};$$

se ne calcolino, se esistono, le soluzioni il cui grafico risulta tangente oppure ortogonale al grafico di  $y = e^x$ .

**3.** Dato  $a > 0$  si consideri la seguente funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y^6 / (|x|^{6a} + |y|^{6a}) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si determinino i valori del parametro  $a$  per cui  $f$  sia:

- a) Continua in  $\mathbb{R}^2$
- b) Differenziabile in  $\mathbb{R}^2$

4. Sia  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 3y^2 \leq z \leq 5 - 3x^2 - 2y^2\}$ . Si calcoli il flusso uscente da  $A$  del campo

$$F(x, y, z) = (\sqrt{y^2 + z^2 + 1} - xy^2, y \sin z, \cos z - x^2 z)$$

5. Data la forma differenziale

$$\omega = \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \left( \frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) dy$$

definita in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , se ne calcoli l'integrale lungo il ramo di parabola  $\{y = x^2 - 1, y \leq 0\}$  secondo il verso delle ascisse crescenti.