

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 18 gennaio 2002

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** quali sono i quattro esercizi svolti.

1. Nell'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$  si consideri la forma differenziale

$$\omega = 2xy \, dx + (x^2 + y^2) \, dy.$$

Si discuta se  $\omega$  è esatta e, se possibile, se ne calcoli una primitiva.

2. Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier della funzione  $f(x) = x^2$ , nel punto  $x = \pi$ , calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} (y \, dx - xy \, dy)$$

dove  $\gamma$  è la semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, contenuta nel semipiano superiore e percorsa in senso *orario*.

4. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^3-2y^3} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

- i) mostrare che  $f(x, y)$  è continua in  $(0, 0)$  e calcolare  $f_x$  e  $f_y$  in  $(0, 0)$   
ii)  $f$  è differenziabile in  $(0, 0)$ ?

5. Determinare il massimo e il minimo della funzione

$$f(x, y) = y - x - \frac{1}{x - 1/4} - \frac{1}{y + 1/2}$$

nell'insieme  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2|x|\}$ .