

## ANALISI 2 — Tema d'esame del 17 novembre 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dimostrare che la seguente equazione integrale

$$y(x) = \alpha + \int_0^x (1 + y(t)) \sin t \, dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

ammette una e una sola soluzione  $y_a \in C^1(\mathbb{R})$ . Trovare inoltre esplicitamente  $y_1(x)$ .

2. Determinare  $g \in C^1(\mathbb{R})$  in modo tale che la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y^2 - g(x)}{(x^2 + y^2)^2} dx - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

sia esatta in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

3. Studiare massimi e minimi della funzione  $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da:

$$F(x, y) = y \left( \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt + y \right).$$

4. Discutere la regolarità (fino alla differenziabilità) della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ xye^{xy} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

5. Posto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq -1/2\}$  e  $f(x, y) = 4xy$  si determinino il massimo e il minimo assoluti di  $f$  in  $D$  e i punti dove essi sono assunti.