

ANALISI 2 — Tema d'esame del 16 novembre 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti.

1. Dimostrare che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, esiste una e una soluzione $y_\lambda \in C^1(\mathbb{R})$ del problema di Cauchy

$$y'_\lambda(t) = \frac{t^2 - 1}{t^4 + 1} \exp(-y_\lambda^2(t)) \arctan y_\lambda(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad y_\lambda(0) = \lambda.$$

Effettuare uno studio qualitativo della soluzione al variare di λ (determinare, in particolare il segno, i massimi e i minimi, e eventualmente il comportamento asintotico per $x \rightarrow \pm\infty$ di y_λ).

2. In $X = \{f \in C^1([0, 1]) : f(0) = 0\}$, si ponga $\|f\| = \max\{|f'(x)|, x \in [0, 1]\} + \max\{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$. Dimostrare che $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.

3. Sia X lo spazio di Banach dell'esercizio precedente e si consideri l'applicazione

$$(Tf)(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \int_0^x f(t) dt \right).$$

Dimostrare che: i) $T : X \rightarrow X$, ii) T è una contrazione rispetto alla norma $\|\cdot\|$. Calcolare i punti fissi di T .

4. Calcolare la lunghezza della curva

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = |t|^{2/3} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

5. Posto $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, z \geq 0\}$, calcolare il flusso del campo $F(x, y, z) = (0, yz, x)$ uscente da T .