ANALISI 2 — Tema d'esame del 9 marzo 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Per $x \in \mathbb{R}$ si ponga $g(x) = f(0, x, f(x, x, 0))$. Sapendo che

$$f(0,0,0) = 1, \qquad \operatorname{grad} f(0,0,0) = (3,4,5), \qquad \operatorname{grad} f(0,0,1) = (6,7,8)$$

si calcoli $g'(0)$. Si discutano in particolare le ipotesi di regolarità per poter applicare il ragionamento.

2. Calcolare la media della funzione $(x^2 + y^2)^{3/4}$ sulla spirale di equazione polare $\rho = \exp(-9\vartheta)$, $\vartheta > 0$.

3. Calcolare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{x-y}$$

nella regione $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Individuare la soluzione *periodica* del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} u'(x) = 7u(x) + 8v(x) \\ v'(x) = 4u(x) + 3v(x) \end{cases}$$

5. Calcolare il volume della regione

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 25(x+y)^2 + 4z^2 \leq 15,\ 7 \leq x \leq 13\}.$$