ANALISI 2 — Tema d'esame del 7 luglio 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Studiare le proprietà di continuità, derivabilità parziale e differenziabilità per la funzione f:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + x^2 y}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \quad 0 \quad , & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri l'equazione differenziale

$$y'''(x) - y''(x) + (4-\alpha)y'(x) + (\alpha - 4)y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare l'integrale generale al variare di α in $\mathbb{R}$ e calcolare l'integrale particolare che sia un polinomio tale che $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 3$.

3. Detta S la sfera $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, si dica per quali valori del parametro reale α il seguente integrale improprio risulta convergente:

$$\int_S (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha \, dx \, dy \, dz.$$

Per tali valori si dia esplicitamente il valore dell'integrale. (Si segua la definizione di integrale improprio, considerando un'opportuna famiglia di domini che invadono tutta S)

4. Si consideri il campo vettoriale

$$F(x,y,z) = \left(\frac{xz^2}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{2yz^2}{(x^2+2y^2)^2}, \frac{-z}{x^2+2y^2} \right)$$

e la curva Γ di equazioni $y = 1$, $z = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$, $x \in [0,2]$, orientata nella direzione delle x crescenti. Dopo aver osservato che F ammette potenziale in un'opportuna regione di $\mathbb{R}^3$ che contiene Γ calcolare $\int_\Gamma F \cdot T\, ds$.

5. Posto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq -1/2\}$ e $f(x,y) = 4xy$ si determinino il massimo e il minimo assoluti di f in D e i punti dove essi sono assunti.