ANALISI 2 — Tema d'esame del 6 luglio 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** quali sono i quattro esercizi svolti.

1. La posizione y di un pendolo soddisfa l'equazione differenziale

$$y'' + \alpha y' + 4y = 0.$$

Dimostrare che esiste α tale che il pendolo passa infinite volte per $y = 0$ indipendentemente dalla posizione iniziale.

2. Determinare i punti di massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = \cos x \sin y$$

sugli insiemi $K = [0, \pi] \times [0, \pi]$ e ∂K.

3. Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega(x, y) = \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}$$

lungo la curva di equazione

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -4/(1 + 3t^6) \end{cases}$$

con $t \in [-1, 1]$ orientata nel verso delle x crescenti.

4. Calcolare l'integrale doppio

$$\int_T (xy + x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

dove $T = T_1 \cup T_2$ con
$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1,\ x \le 0\}$ e
$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/4 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}$.

5. Dare, quando possibile, per ciascuna delle seguenti affermazioni un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *continua* in $(0,0)$, che le soddisfi.

a) Per qualunque direzione ν, non esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$;

b) esiste il piano tangente in $(0,0)$, ma non esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$, dove ν è la direzione parallela alla bisettrice del primo quadrante;

c) esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, ma non esiste $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0,0)$ per qualunque altra direzione ν.