Traccia della soluzione. Prima prova in itinere — 31 ottobre 2001

1. Evidentemente la successione converge puntualmente a zero. La convergenza non può essere uniforme in quanto $\lim_{x\to 0+} f_n(x) = 1$ per ogni n, quindi

$$\sup_{x\in]0,1[} |f_n(x)| \geq 1 \not\to 0.$$

2. Vale la disuguaglianza

$$|e^{-n}\cos(nx)| \leq e^{-n} \qquad \forall n.$$

Siccome la serie numerica $\sum e^{-n}$ converge, la serie data converge per il criterio di Weierstraß.

3. La successione data converge puntualmente alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione g è discontinua nell'origine e tutte le g_n sono continue in $\mathbb{R}$, per cui la convergenza non può essere uniforme in $\mathbb{R}$. Si verifica facilmente che la successiona data converge uniformemente alla funzione nulla nell'insieme $\{|x| \geq \varepsilon\}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

4. La funzione e^{-x^2} è esprimibile in serie di Taylor utilizzando la sostituzione $t = -x^2$ nella serie di e^t. Si ha quindi

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$$

e la convergenza è uniforme in ogni insieme compatto di $\mathbb{R}$. Si può quindi integrare per serie e trovare una serie numerica convergente la cui somma coincide col valore dell'integrale richiesto.

5. Consideriamo la funzione $\tilde{f}(x)$ ottenuta prolungando per periodicità a tutto $\mathbb{R}$ la funzione f ristretta all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Tale funzione è continua e regolare a tratti per cui la sua serie di Fourier $s(x)$ converge puntualmente a $\tilde{f}(x)$. Calcolando esplicitamente s e imponendo l'uguaglianza $\pi^2 = s(x)$ si ottiene il risultato richiesto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}.$$