Prima prova in itinere — 31 ottobre 2001

1. Considerare la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{nx+1}, \qquad x \in]0,1[.$$

Mostrare che la successione converge puntualmente ma non uniformemente alla funzione identicamente nulla.

2. Dimostrare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cos(nx)$$

converge uniformemente in tutto $\mathbb{R}$.

3. Studiare la successione di funzioni

$$g_n(x) = e^{-n|x|}$$

4. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$$

utilizzando un'opportuna serie di funzioni. Giustificare i passaggi svolti.

5. Utilizzando lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$, nel punto $x = \pi$, calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$