ANALISI 2 — Tema d'esame del 25 maggio 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** quali sono i quattro esercizi svolti.

1. Si discuta la possibile esistenza di una forma differenziale

$$\omega \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

per cui si possano trovare due curve γ_1 e γ_2 semplici, regolari e chiuse che soddisfino

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \omega = \pi.$$

In caso ciò sia possibile, presentare esplicitamente una possibile scelta di ω, γ_1 e γ_2.

2. Siano

$$x(u,v) = u^2 + v^2, \quad y(u,v) = u^2 - v^2, \quad z(u,v) = 2uv$$

e $f(x,y,z) = z\log(xy)$. Posto

$$\phi(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

discutere la regolarità di ϕ e calcolare, dove esistono, ϕ_u e ϕ_v.

3. Determinare i punti di minima distanza dall'origine della curva

$$x^2 + 2xy - y^2 + 4 = 0$$

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = -20e^{2x}, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 4.$$

Se ne discuta l'esistenza, l'unicità e l'esistenza in grande ($x \in \mathbb{R}$) della soluzione. Si calcoli la soluzione massimale e, se esiste, il $\lim_{x \to +\infty} y(x)$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. L'equazione $f(x, y) = 0$ definisca una funzione implicita $y(x)$ in $x = 0$ tale che $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. Sapendo che

$$\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) = -1/3, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{2y(x) - x^2}{x^2} = 3,$$

calcolare

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(0,0).$$

(Aiuto: si ricordi che la formula per $y''(x)$ si ottiene derivando l'espressione di $y'(x)$).