Scritto d'esame — 21 giugno 2002

1. L'equazione
$$\frac{x^3}{3} + y^3 + xy = 0$$
definisce una sola funzione implicita in un intorno del punto $x = -\sqrt[3]{2/3}$. Dire se il punto $x = -\sqrt[3]{2/3}$ è di minimo o di massimo o nessuno dei due. (Verificare in particolare che il punto $(-\sqrt[3]{2/3}, -\sqrt[3]{4/9})$ soddisfa l'equazione).

2. Data la forma differenziale ω definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ dall'espressione
$$\omega(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}\left(\frac{e^{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\right),$$
calcolare
$$\lim_{h\to+\infty}\int_{\gamma(h)} \omega,$$
dove $\gamma(h)$ è il segmento che congiunge il punto $(0,1)$ al punto $(0,h)$.