ANALISI 2 — Tema d'esame del 19 gennaio 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2} + xy \right) dx + \frac{y}{1+x^2+y^2}\, dy.$$

Calcolare l'integrale di ω sulla curva

$$\Gamma = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \log x,\ 0 \le x \le 1 \right\}.$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{per } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la regolarità di f e calcolare in particolare le derivate direzionali di f nell'origine al variare di $v = (v_1, v_2)$ direzione in $\mathbb{R}^2$.

3. Sia I l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione y del problema di Cauchy

$$y' + y = \frac{x-2}{x^3}, \qquad y(1) = e^{-1} + 2.$$

Calcolare, se esiste, $\displaystyle\int_1^{\sup I} y(x)\, dx.$

4. Sia (X, d) uno spazio metrico e si considerino due funzioni lipschitziane $f, g : X \to \mathbb{R}$. Discutere la lipschitzianità di $f + g$ e di fg.

Cosa succede se al posto di $\mathbb{R}$ si sceglie un secondo spazio metrico (Y, d_2)?

5. Studiare massimi e minimi della funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x, y) = xy\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$