Prima prova in itinere — 12 ottobre 2002

1. Considerare la successione di funzioni

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}, \;\; x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Mostrare che la successione:

a) converge a 0 $\forall x \in [0, +\infty[$ per ogni α.

b) converge uniformemente in $[1, +\infty[$ per ogni α.

Discutere inoltre la convergenza uniforme in $[0, 1]$ al variare di α.

2. Data la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x \log x)^n$$

determinare un intervallo $[a, b]$ in cui ci sia convergenza uniforme.

3. Determinare lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine della **derivata** della funzione

$$g(x) = xe^{-x^2}$$

4. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)}$$

calcolare il raggio di convergenza ρ e studiare la convergenza nei punti $\pm\rho$.