ANALISI 2 — Tema d'esame del 29 settembre 2000

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Studiare la continuità, la differenziabilità e l'esistenza delle derivate parziali ($\partial/\partial x$ e $\partial/\partial y$) per la funzione f:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sin(y)(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2. Si consideri la soluzione $y = y(x)$ della equazione differenziale

$$x^2 + 2yx + y^2 - 2x^2y' = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

il cui grafico rimane tangente alla retta di equazione cartesiana $y + 1 = 0$. Si descriva qualitativamente il comportamento di tale soluzione nell'intorno del punto di tangenza e successivamente si calcoli l'espressione analitica della soluzione medesima (può essere utile la sostituzione $z = y/x$).

3. Si consideri l'insieme

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 - 2y \geq 0,\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\right\}$$

Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_T xy\, dx\, dy.$$

4. Dato il dominio $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$, si calcoli il flusso uscente da D del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (y - x, z + y, 6x^4y^2)$$

5. Posto $f(x) = \pi^2 - x^2$, $0 < x < \pi$, trovare una serie di soli coseni che converge a f in $]0, \pi[$. Studiare il tipo di convergenza e dedurre la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$