

ANALISI 2 — Tema d'esame del 19 gennaio 2001

Per ottenere il punteggio massimo (30/30) è richiesto lo svolgimento corretto di 4 esercizi a scelta tra i seguenti. Indicare **chiaramente** gli esercizi svolti.

1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2} + xy \right) dx + \frac{y}{1 + x^2 + y^2} dy.$$

Calcolare l'integrale di ω sulla curva

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \log x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

2. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Studiare la regolarità di f e calcolare in particolare le derivate direzionali di f nell'origine al variare di $v = (v_1, v_2)$ direzione in \mathbb{R}^2 .

3. Sia I l'intervallo massimale in cui è definita la soluzione y del problema di Cauchy

$$y' + y = \frac{x - 2}{x^3}, \quad y(1) = e^{-1} + 2.$$

Calcolare, se esiste, $\int_1^{\sup I} y(x) dx$.

4. Sia (X, d) uno spazio metrico e si considerino due funzioni lipschitziane $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Discutere la lipschitzianità di $f + g$ e di fg .

Cosa succede se al posto di \mathbb{R} si sceglie un secondo spazio metrico (Y, d_2) ?

5. Studiare massimi e minimi della funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x, y) = xy e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$