Test d'Ipotesi – Esempi

Esempio 1. Il reddito medio μ di una famiglia che abita in una certa regione *non supera* i 12500 Euro ($\mu \leq 12500$).

Sottoporre a verifica tale ipotesi.

L'ipotesi sulla media è più sfumata rispetto agli esempi precedenti in quanto si limita a imporre un limite superiore alla media, non un valore preciso.

Si può adottare una procedura simile a quella vista nella scorsa lezione.

Test d'Ipotesi – Esempi

1. Si considera la media $\overline{x}$ ottenuta da un campione sufficientemente ampio e la si confronta con il limite superiore per μ di 12500 Euro.
2. Se $\overline{x}$ risulta inferiore a 12500 Euro, non si ha alcun elemento per rigettare l'ipotesi.
3. I dubbi sulla bontà dell'ipotesi cominciano ad affiorare se $\overline{x}$ supera i 12500 Euro.

Test d'Ipotesi – Esempi

Come si procede se $\overline{x}$ supera i 12500 Euro?

- Se si vuole un livello di significatività del 5%, si avranno elementi per rigettare l'ipotesi quando $\overline{x}$ si lascia *a sinistra* almeno il 95% dei dati. Questo accade non appena si esce dall'intervallo $(-\infty\,,\,\mu + 1.64\,\frac{s}{\sqrt{n}}]$.
- Se si vuole un livello di significatività dell'1%, l'ipotesi diventa rigettabile (con un margine di rischio dell'1%) non appena $\overline{x}$ esce dall'intervallo $(-\infty\,,\,\mu + 2.33\,\frac{s}{\sqrt{n}}]$, entro il quale cade il 99% dei dati.

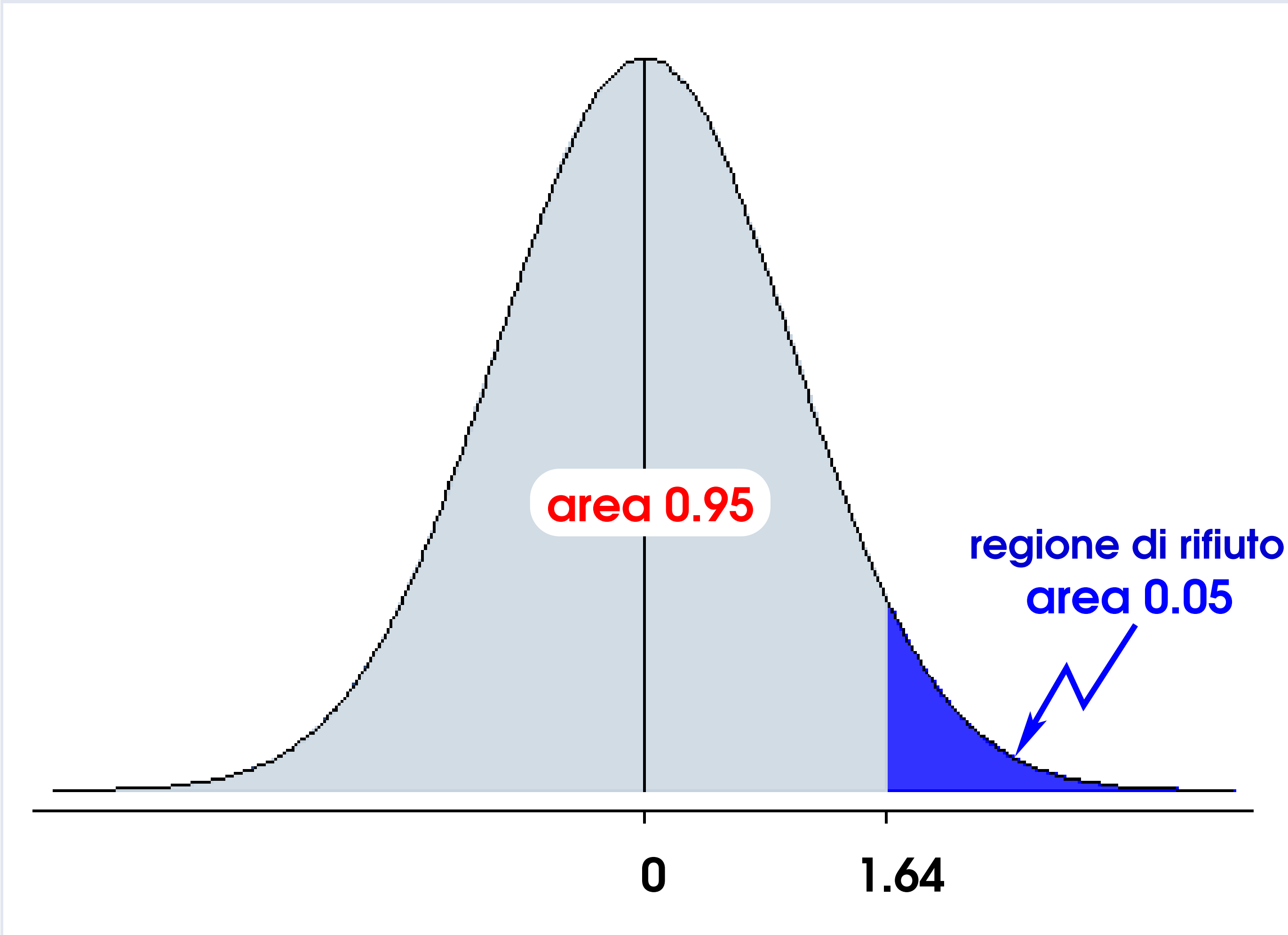
n è la numerosità del campione, s è la deviazione standard campionaria.

Curva Gaussiana

aree sottese dalla curva gaussiana
sull' intervallo [μ , μ + z σ]

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.00	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199
0.10	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596
0.20	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987
0.30	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368
0.40	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736
0.50	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088
0.60	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422
0.70	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734
0.80	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
0.90	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289
1.00	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531
1.10	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749
1.20	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
1.30	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115
1.40	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265
1.50	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394
1.60	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505
1.70	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599
1.80	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678
1.90	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744
2.00	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
2.10	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842
2.20	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878
2.30	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906
2.40	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929
2.50	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946
2.60	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960
2.70	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970
2.80	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978
2.90	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984
3.00	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989

Test a Una Coda



Test d'Ipotesi – Esempi

Esempio 2. Un ricercatore intende saggiare, con livello di significatività del 5%, l'affermazione di una ditta farmaceutica secondo la quale il tempo che intercorre tra l'assunzione di un farmaco e la manifestazione dei primi effetti è al più di 4 minuti.

A questo scopo considera un campione casuale di 100 pazienti e trova che in media il tempo necessario per riscontrare efficacia nel farmaco è di 4 minuti e 6 secondi, con scarto quadratico medio $s = 0.6$ minuti.

Quali sono le conclusioni del test? Cambia qualcosa se i dati sperimentali hanno scarto quadratico medio $s = 0.64$ minuti?

Test d'Ipotesi – Esempi

Convertiamo il tempo medio campionario di reazione del farmaco in forma decimale: $\overline{x} = 4$ minuti e 6 secondi $= 4.1$ minuti.

Ipotesi zero: $\mu \leq 4$ minuti. Si tratta di un *test a una coda*.

Avremo ragione di dubitare dell'affermazione della ditta solo se si misurano, come in questo caso, tempi di reazione maggiori al limite superiore dichiarato dal produttore.

Calcoliamo il valore di u che risolve l'equazione:

$$\overline{x} - \mu = 0.1 = u \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.06\, u \quad \Rightarrow \quad u = 1.67$$

Dunque, $\overline{x}$ si trova fuori dall'intervallo $\left(-\infty\,,\, \mu + 1.64 \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$, entro il quale cade il 95% dei dati.

Al livello di significatività del 5%, l'ipotesi zero è da respingere.

Test d'Ipotesi – Esempi

Se $s = 0.64$,

$$\overline{x} - \mu = 0.1 = u \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.064\, u \quad \Rightarrow \quad u = 1.56$$

Dunque, $\overline{x}$ cade nell'intervallo $\left(-\infty\,,\ \mu + 1.64 \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$.

Al livello di significatività richiesto l'ipotesi non è rigettabile.

L'esempio evidenzia l'importanza dell'accuratezza della verifica sperimentale. Lo scarto quadratico medio misura infatti la dispersione dei dati attorno al valor medio e indica il grado di imprecisione nelle misure. Le conclusioni tratte dall'esame dei dati sono difformi nei due casi.

Esercizio 1. Sono dati 150 g di una soluzione $\mathcal{S}_1$ concentrata al 12%.

(a) Determinare quanti grammi di soluto occorre aggiungere a $\mathcal{S}_1$ per ottenere una nuova soluzione $\mathcal{S}_2$ concentrata al 20%.

(b) Determinare quanti grammi di solvente occorre aggiungere a $\mathcal{S}_2$ per riottenere una soluzione con la stessa concentrazione iniziale.

Esercizio 2. Si dispone di una soluzione $\mathcal{S}_1$ concentrata al 20% e di una soluzione $\mathcal{S}_2$ (dello stesso soluto nello stesso solvente) concentrata al 10%.

(a) Trovare la concentrazione di una soluzione $\mathcal{S}_3$ composta dal 15% di $\mathcal{S}_1$ e dall'85% di $\mathcal{S}_2$.

(b) Trovare il peso iniziale di $\mathcal{S}_1$ sapendo che, se aggiungo 10 g di soluto, la concentrazione diventa del 40%.

Esercizi di Ricapitolazione

Esercizio 3. Scegliendo le coordinate logaritmiche opportune (semilogaritmiche o doppiamente logaritmiche), calcolare i coefficienti angolari delle rette corrispondenti alle seguenti funzioni:

1) $y = \sqrt{\dfrac{6}{x^3}}$

2) $y = 4^{5x-2}$

Esercizio 4.

(a) In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = -\log_{10} 4 + (\log_{10} 3)X$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y, dove $X = x$ e $Y = \log_{10} y$.

(b) In un grafico con scala doppiamente logaritmica è rappresentata la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + 2X$. Trovare il corrispondente legame funzionale tra x e y, dove $X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$.

Esercizio 5. Nella seguente tabella sono riportati, raggruppati in classi, i dati relativi all'altezza media (espressa in cm) di una popolazione di 100 individui:

altezza (cm)	f_i
$155 - 165$	10
$165 - 175$	20
$175 - 185$	50
$185 - 195$	20
	100

(a) Calcolare la media.

(b) Calcolare la mediana, usando l'istogramma delle frequenze o l'ogiva di frequenza.